Dr Abdelkrim HADDAD
Dipl. Ing., PhD, M.C., MAIAA

TRANSFERTS THERMIQUES

UN COURS DE BASE POUR LES ETUDIANTS EN CYCLE DE GRADUATION

AVEC PLUS DE 100 PROBLEMES ET EXERCICES RESOLUS

Alger 2001

Dar -El - Djazairia

AVANT-PROPOS

Bien que le développement et la disponibilité de calculateurs aujourd'hui rendent indispensable qu'un ingénieur soit familier avec les méthodes numériques de résolution de problèmes de transfert de chaleur, la compréhension des mécanismes entraînant ce transfert restent la voie obligatoire à emprunter afin d'arriver à ce but.

Le présent ouvrage voudrait contribuer à répondre à la nécessité de faire apprécier à l'étudiant les mécanismes qui commandent ce phénomène assez commun d'échange d'énergie qu'est le transfert thermique. Il est le fruit d'un support de cours enseigné à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs, à l'université d'Annaba et au Centre Universitaire de Guelma. Il comporte principalement cinq chapitres dont les trois premiers traitent chacun d'un mode particulier de transfert de chaleur (conduction, convection et rayonnement) tandis que le quatrième traite de l'échange de chaleur avec changement de phase. Les échangeurs de chaleur constituant le dernier chapitre de l'ouvrage, sont une application directe des différents phénomènes étudiés qu'on rencontre dans de nombreux secteurs de l'industrie.

L'auteur essaye aussi de répondre à une exigence généralement considérée comme une caractéristique essentielle dans un ouvrage destiné à des étudiants en cycle universitaire: la disponibilité d'exercices résolus. Aussi, tous les chapitres ont été illustrés d'exemples traités dans le détail. En plus, des questions de compréhension ainsi que des problèmes représentatifs de situations concrètes ont été inclus à la fin de chaque chapitre. Néanmoins, le lecteur pourrait noter l'absence de programmes de calcul spécifiques. En effet, sachant qu'il existe plusieurs manières d'approcher la solution d'un problème de transfert thermique et assumant que ce dernier possède les principes de base lui permettant de rédiger un programme de calcul quand l'algorithme est connu, l'auteur s'abstint d'en présenter et s'est tenu au traitement d'exemples représentatifs des techniques de résolution les plus utilisées. Le lecteur intéressé pourra trouver un grand nombre de logiciels traitant divers problèmes de transfert de chaleur en consultant la littérature spécialisée.

L'ouvrage est enfin complété par une série d'annexes rassemblant les principales données thermophysiques nécessaires à la résolution d'un problème thermique. Il est clôturé par des tables de conversion entre le système d'unités internationales (SI) et les unités anglo-américaines encore très utilisées.

A. HADDAD

NOTATIONS

Sauf indication contraire, les notations utilisées sont :

1 - Caractères latins

a : Diffusivité thermique
c : Chaleur massique ou vitesse de propagation des ondes électromagnétiques
c_0 : Vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide
C_1, C_2 : Constantes de la loi de Planck
C_l : Chaleur spécifique du liquide à la température de saturation
C_p : Chaleur massique à pression constante
C_{sf} : Constante
d, D : Diamètres
e : Epaisseur
E : Eclairement
F_{ij} : Facteur de forme
G : Vitesse de masse
g_c : Constante
h : Coefficient d'échange de chaleur par convection ou constante de Planck
H : Enthalpie
I : Intensité d'un rayonnement
J : Radiosité
k : Coefficient d'échange de chaleur par conduction
L : Longueur ou luminance d'un rayonnement
L_c : Chaleur latente de condensation
L_v : Chaleur latente de vaporisation
$\dot{m}$: Débit massique
M : Emittance
M_λ : Emittance monochromatique
n : Indice de réfraction ou normale à la surface
P : Pression
p : Pression ou périmètre
q, Q : Quantité de chaleur
q_v : Débit volumique
r : Coordonnée ou rayon
R : Constante des gaz parfaits
s : Constante
S : Surface
t : Temps

T : Température
T_{ce} : Température d'entrée du fluide chaud
T_{cs} : Température de sortie du fluide chaud
T_{fe} : Température d'entrée du fluide froid
T_{fs} : Température de sortie du fluide froid
T_g : Température de la phase gazeuse
T_p : Température à la paroi
T_{sat} : Température de saturation
T_∞ : Température loin de la paroi
U : Vitesse
u : Composante de vitesse/x
v : Composante de vitesse/y
V : Volume
W : Travail
w : Composante de vitesse/z
x,y,z : Coordonnées

2- Caractères grecs

α : Absorptivité
α_λ : Absorptivité monochromatique
β : Coefficient de dilatation volumique
δ : Epaisseur ou épaisseur de la couche limite
ε : Emissivité ou efficacité d'une ailette
λ : Longueur d'onde
μ : Viscosité dynamique
ν : Viscosité cinématique ou fréquence de radiation
ρ : Masse volumique ou réflectivité totale
ρ_λ : Réflectivité monochromatique
σ : Constante de Stefan-Boltzman ou tension de surface
τ : Contrainte de cisaillement dans un fluide ou transmittivité totale
φ : Densité de flux thermique
Φ : Flux thermique
Ψ : Angle
Ω : Angle solide

3- Nombres sans dimensions

Bi : Nombre de Biot
Gr : Nombre de Grashoff
Nu : Nombre de Nüsselt
$\Pr$: Nombre de Prandtl
Ra : Nombre de Rayleigh
Re : Nombre de Reynolds

SOMMAIRE

Chapitre : 3

TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION

Chapitre : 4

TRANSFERT DE CHALEUR PAR RAYONNEMENT

Chapitre : 5

TRANSFERT DE CHALEUR AVEC CHANGEMENT D'ETAT

Chapitre : 6

ECHANGEURS DE CHALEUR

Chapitre 1 :

INTRODUCTION AUX TRANSFERTS THERMIQUES

- Introduction
- Rappels de thermodynamique
- Différents modes de transfert de chaleur
- Conclusion

1.1 Introduction

Le transfert de chaleur est l'un des modes les plus communs d'échange d'énergie. Il intervient naturellement entre deux systèmes dès qu'existe entre eux une **différence de température** et cela quel que soit le milieu même vide qui les sépare.

A la base de l'étude des transferts thermiques se trouvent les principes **de quantité de chaleur** et **de différence de température** définis par la thermodynamique dans ses principes mêmes. Toutefois, la thermodynamique classique traite de l'état des systèmes sous l'angle macroscopique et ne fait aucune hypothèse concernant la structure de la matière. Ainsi, elle s'attache aux états d'équilibre et néglige les différents mécanismes qui y conduisent. L'étude de ceux-ci constitue la discipline qui nous intéresse: les **transferts thermiques**.

1.2 Rappels de thermodynamique

1.2.1 Le premier principe de la thermodynamique

Le premier principe est fondamentalement un principe de conservation. Il régit les transformations mutuelles du travail et de la chaleur en établissant un bilan. Il peut s'énoncer comme suit:

"Lorsqu'un système isolé subit une série de transformations qui le ramènent à un état d'équilibre final (2) identique à l'état d'équilibre initial (1) et au cours desquelles il n'échange avec l'extérieur que du travail et de la chaleur, le rapport du travail à cette quantité de chaleur est constant"

$$[W+Q]_1^2 = \text{Constante} \qquad (1.1)$$

où:

W : Travail échangée entre le système et le milieu extérieur
Q : Chaleur échangée entre le système et le milieu extérieur

1.2.2 Le second principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique permet de faire le bilan des échanges d'énergie d'un système matériel subissant des transformations quelconques, mais il ne fait aucune différence entre les diverses formes sous lesquelles cette énergie se trouve fournie au milieu extérieur. Or, il n'est pas indifférent de recueillir la diminution d'énergie d'un système sous forme de travail ou de chaleur comme il n'est pas non plus sans importance que la quantité de chaleur éventuellement fournie le soit à une température faible ou à une température élevée.

Le second principe permet de calculer la quantité de travail susceptible d'être recueillie dans une transformation déterminée. Il permet aussi de préciser le sens dans lequel tendent réellement à évoluer les systèmes (alors que le premier principe qui est essentiellement un principe d'équivalence, ne nous indique rien sur le s les systèmes (alors que le premier principe qui est essentiellement un principe d'équivalence ne nous indique rien sur le sens de la transformation).

1.3 Différents modes de transfert de chaleur

Le transfert de chaleur peut être défini comme la transmission de l'énergie d'une région à une autre sous l'influence d'une différence de température. Il est régi par une combinaison de lois physiques.

La littérature traitant du transfert de chaleur reconnaît essentiellement trois modes de transmission de la chaleur : la conduction, le convection et le rayonnement.

1.3.1 La conduction

La conduction est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur provoquée par la différence de température entre deux régions d'un milieu solide, liquide ou gazeux ou encore entre deux milieux en contact physique.

1.3.2 La convection

Les phénomènes de convection interviennent dans la transmission de la chaleur chaque fois qu'un fluide se déplace par rapport à des éléments fixes. Lorsque se produit au sein du fluide des courants dus simplement aux différences de densité résultant des gradients de température, on dit que la convection est naturelle ou libre. Par contre, si le mouvement du fluide est provoqué par une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé convection forcée.

1.3.3 Le rayonnement

Le rayonnement est le mécanisme par lequel la chaleur se transmet d'un milieu à haute température vers un autre à basse température lorsque ces milieux sont séparés dans l'espace. Ce mode de transfert ne nécessite pas de support matériel et peut donc s'effectuer dans le vide. En général, les sources de rayonnement sont des solides et le rayonnement se fait par la surface.

1.4 Conclusion

La plupart des phénomènes étudiés font apparaître l'intervention des trois modes de transmission de la chaleur en même temps. Afin d'expliciter ceci, prenons le cas d'une chambre (cf. figure 1.1)

En effet, les trois modes de transfert de chaleur interviennent dans ce cas et sont représentés par :

- La conduction à travers les murs, le parquet et le toit de la chambre,
- La convection qui prend place grâce au mouvement de l'air à l'extérieur et à l'intérieur de la chambre,
- Le rayonnement de la lampe éclairant la chambre.

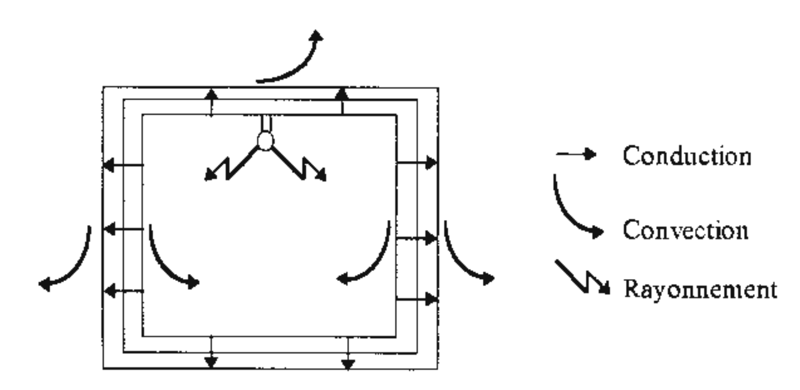


Figure 1.1: Illustration du phénomène de transfert de chaleur se produisant dans une chambre close

Chapitre 2 :

TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION

- Concept de la conduction
- Loi fondamentale de la conduction
- Régime permanent - conduction stationnaire
- Convection de la chaleur des surfaces
- Rayonnement de la chaleur des surfaces
- Conduction unidimensionnelle avec déperdition aux surfaces latérales
- Conduction bi-dimensionnelle stationnaire - Séparation des variables
- Conduction unidimensionnelle en régime variable - Transformée de Laplace
- Méthode numérique de résolution de l'équation de la chaleur - méthode des différences finies

2.1 Concept de la conduction

Le transfert de la chaleur par conduction est associé aux mouvements de translation, vibration et rotation des molécules et atomes constituant le milieu considéré.

Quand la température d'un corps croit, l'énergie cinétique des molécules et atomes le constituant croit aussi entraînant une augmentation du transfert de chaleur par conduction.

2.2 Lois fondamentales de la conduction

2.2.1 Définitions

Considérons une plaque (D) de surface S. Soit dQ la quantité de chaleur échangée entre la plaque et l'air ambiant pendant le temps dt.

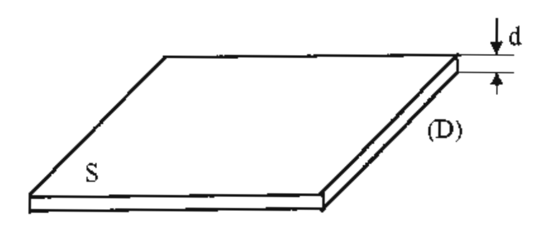


Figure 2.1: Plaque plane

On définit:

• Le **flux thermique** comme la puissance échangée par la surface S de la plaque. Il s'exprime:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \; ; \; [\Phi] = Watts \tag{2.1}$$

• La **densité de flux thermique** comme la puissance échangée par une surface unité de la plaque. Elle s'exprime:

$$\varphi = \frac{dQ}{S\,dt} \; ; \; [\varphi] = Watts\,/\,m^2 \tag{2.2}$$

• La **source de chaleur** par la puissance thermique qu'elle produit. Dans le cas d'une réaction chimique, elle s'exprime:

$$Q' = A_0 . e^{-\alpha t} \tag{2.3}$$

où: A_0 et α sont des constantes.

2.2.2 Loi élémentaire de Fourier

Les principes fondamentaux de la thermodynamique nous font savoir que:

• L'énergie est conservée en l'absence de source de chaleur,
• La chaleur transmise passe toujours du corps chaud vers le corps froid.

Si on considère la plaque (D):

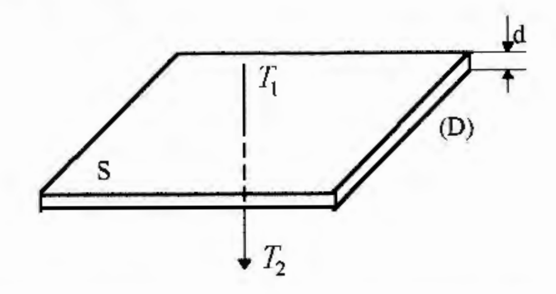


Figure 2.2: Plaque plane à travers laquelle se transmet la chaleur

On peut vérifier expérimentalement que:

$$Q = k\frac{S}{d}(T_1 - T_2) \tag{2.4}$$

avec:

- $T_1 \succ T_2$
- Q: la quantité de chaleur transférée à travers (D).
- k: le facteur de proportionnalité appelé **conductivité thermique** qui est une caractéristique du matériau.

Pour un élément infinitésimal dS, la relation (2.4) s'écrit:

$$dQ = -k\, dS\, \frac{\partial T}{\partial n} \qquad (2.5)$$

L'équation (2.5) est attribuée au mathématicien français Jean Baptiste Fourrier qui en 1822 énonça sa loi qui peut se traduire comme suit: "En tout point d'un milieu isotrope, le densité de flux thermique instantanée est proportionnelle à la conductivité thermique k du milieu et au gradient de la température".

Ceci nous conduit à la forme vectorielle de la loi de Fourier qui exprime la densité du flux thermique définie comme la quantité de chaleur transmise par unité de surface. Soit:

$$\vec{\varphi} = -k\, Grad\vec{T} \qquad (2.6)$$

Remarque:

Par convention $\vec{\varphi}$ est compté positivement dans le sens d'écoulement de la chaleur c'est-à-dire vers les températures décroissantes. $Grad\vec{T}$ est un vecteur porté par le même axe mais de sens contraire à φ, d'où le signe négatif de la loi de Fourier.

Exemple 2.1:

Calculez le flux thermique ainsi que la densité du flux thermique à travers une plaque plane et homogène dont l'épaisseur est de 50mm si elle est (a) en acier inoxydable $(k = 16W/mK)$ *de dimensions 3mx2m ou en (b) en béton* $(k = 0{,}92W/mK)$ *de dimensions 30mx2m. Dans les deux cas, les températures aux surfaces de la plaque sont maintenues constantes et égales à* $T_{p1} = 100°C$ *et* $T_{p2} = 90°C$.

Solution:

(a) Plaque en acier:

- $Q = \Phi = k_{acier}\dfrac{S}{e}\left(T_{p1} - T_{p2}\right) = 16\text{x}\dfrac{3\text{x}2}{0{,}05}(100-90) = \underline{19200\ Watts}$

- $\varphi = \dfrac{\Phi}{S} = \dfrac{19\ 200}{3\text{x}2} = \underline{3200\ W/m^2}$

(b) Plaque en béton:

- $Q = \Phi = k_{beton}\dfrac{S}{e}\left(T_{p1} - T_{p2}\right) = 0{,}92\dfrac{30\text{x}20}{0{,}05}(100-90) = \underline{110400\ Watts}$

- $\varphi = \dfrac{\Phi}{S} = \dfrac{110\ 400}{30\text{x}20} = \underline{184\ W/m^2}$

La densité du flux de chaleur montre la capacité d'un matériau à transmettre de la chaleur par conduction. De ce cas, on peut déduire que l'acier est nettement plus conducteur que le béton.

2.2.3 Equation générale de la conduction

Dans un système de coordonnées cartésien (O,x,y,z), l'équation de la conduction de la chaleur ou simplement l'équation de la chaleur peut être développée en considérant un volume infinitésimal V et en effectuant le bilan thermique relatif à ce volume pendant le temps dt.

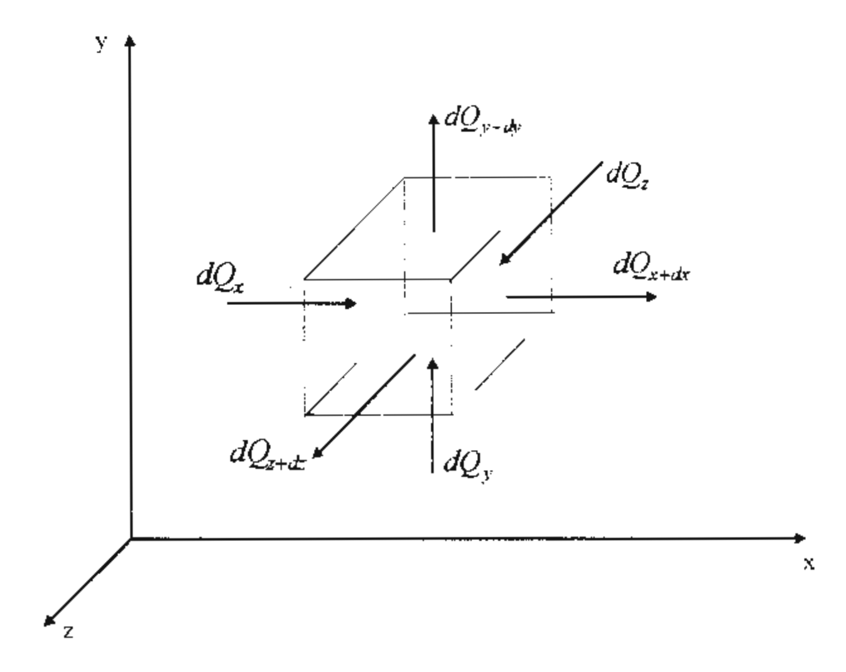


Figure 2.3: Bilan thermique à travers un volume infinitésimal relativement au système de coordonnées cartésien

Relativement à la section perpendiculaire à l'axe des x, les quantités de chaleur s'expriment grâce à la loi de Fourier:

$$dQ_x = -k\left(dydz\right)\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$dQ_{x+dx} = dQ_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(dQ_x\right)dx + \ldots \qquad \text{(série de Taylor)}$$

$$dQ_{x+dx} = -k\left(dydz\right)\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[-k\left(dydz\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right]dx$$

$$dQ_{x+dx} = -k\frac{\partial}{\partial x}\left[T + \frac{\partial T}{\partial x}dx\right]dydz$$

Le bilan thermique relativement à l'axe des x est:

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = -k\frac{\partial T}{\partial x}dydz + k\frac{\partial T}{\partial x}dydz + k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dxdydz$$

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial T}{\partial x}\right]dxdydz \qquad (2.7)$$

En exprimant les différentes quantités de chaleur mises en jeu relativement aux parois perpendiculaires aux axes y et z, et en développant les équations de la même manière que pour la direction x, on aura:

$$dQ_y - dQ_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y}\left[k\frac{\partial T}{\partial y}\right]dxdydz \tag{2.8}$$

$$dQ_z - dQ_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z}\left[k\frac{\partial T}{\partial z}\right]dxdydz \tag{2.9}$$

Le bilan des quantités de chaleur transmises par conduction à travers le volume V est:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]dxdydz$$

Si par unité de temps et de volume, la quantité $Q'(x,y,z,t)$ est fournie, alors la quantité de chaleur générée dans l'élément sera:

$$Q'dx\,dy\,dz \tag{2.10}$$

La chaleur transmise dans l'élément de volume due à la conduction et la quantité générée ensemble servent à augmenter l'énergie interne de l'élément. Cet accroissement s'exprime:

$$\rho\, c\; dxdydz\;\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.11}$$

Le bilan énergétique final donne:

$$\rho\, c\,\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+Q' \tag{2.12}$$

qui est l'équation générale de la conduction en coordonnées cartésiennes. Elle est générale et est valable pour les milieux hétérogènes anisotropes car:

$$\begin{cases} k = k(x,y,z,t) \\ \rho = \rho(x,y,z,t) \\ c = c(x,y,z,t) \end{cases}$$

Pour un corps isotrope et homogène, l'équation précédente devient:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho\, c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\frac{Q'}{\rho\, c} \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\,\nabla^2 T + \frac{Q'}{\rho\, c} \tag{2.14}$$

où: $\alpha = k/\rho\, c$ est le coefficient de diffusivité thermique.

2.2.3.1 Equation générale de la conduction en coordonnées cylindriques

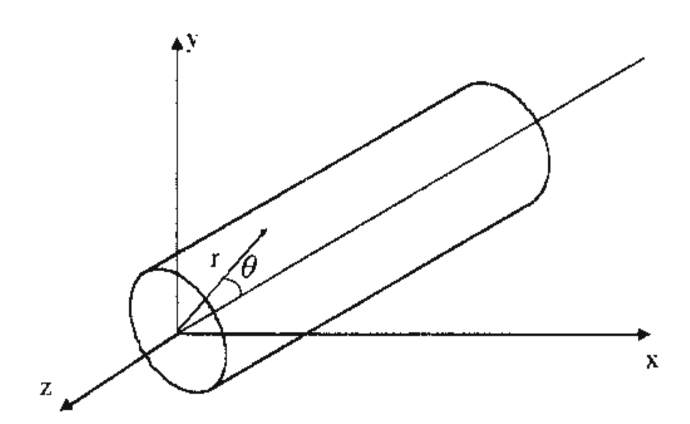


Figure 2.4: Système de coordonnées cylindriques

Sachant que:

$$\begin{cases} x = r\ \cos(\theta) \\ y = r\ \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

l'équation de la chaleur s'écrit en coordonnées cylindriques:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{Q'}{\rho c} \qquad (2.15)$$

2.2.3.2 Equation générale de la conduction en coordonnées sphériques

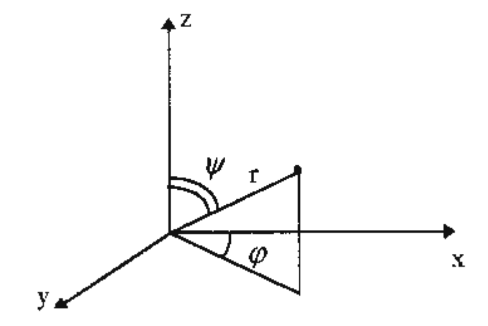


Figure 2.5: Système de coordonnées sphériques

Sachant que:

$$\begin{cases} x = r\ \cos(\varphi)\sin(\psi) \\ y = r\ \sin(\varphi)\sin(\psi) \\ z = r\ \cos(\psi) \end{cases}$$

l'équation de la chaleur s'écrit en coordonnées sphériques:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin(\psi)}\frac{\partial}{\partial \psi}\left[\sin(\psi)\frac{\partial T}{\partial \psi}\right] + \frac{1}{r^2 \sin^2(\psi)}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right\} + \frac{Q'}{\rho c} \qquad (2.16)$$

2.3 Conditions aux limites

L'équation générale de la conduction est une équation aux dérivées partielles, linéaire de deuxième ordre. Elle admet une infinité de solutions et ne peut avoir de sens physique que pour des conditions définies représentant les causes qui déterminent l'évolution du phénomène: ce sont les conditions aux limites.

2.4 Régime permanent - Conduction stationnaire

En régime permanent ($\partial T / \partial t = 0$) sans sources ($Q' = 0$), la répartition des températures dans un milieu isotrope et homogène obéit à l'équation:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \qquad (2.17)$$

Dans ce qui suit, nous ne nous intéresserons pas à la résolution de l'équation dans le cas général mais considérerons plutôt des cas simples qui souvent sont les plus utilisés dans la pratique.

2.4.1 Le mur

Le "mur" est un milieu conducteur homogène limité par deux plans parallèles infinis maintenus à une température uniforme.

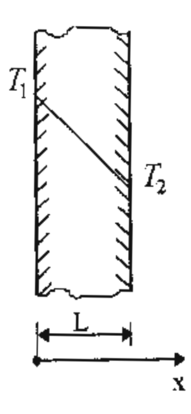


Figure 2.6: Distribution de la température à travers un mur en régime permanent

Les sources de chaleur assumées inexistantes en régime permanent, l'équation fondamentale de la chaleur notée (2.13) se réduit à:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \qquad (2.18)$$

qui possède une solution de la forme:

$$T(x) = C_1 x + C_2 \tag{2.19}$$

Les constantes C_1 et C_2 sont évaluées à partir des conditions aux limites:

$$\begin{cases} T = T_1 & \text{pour} \quad x = 0 \\ T = T_2 & \text{pour} \quad x = L \end{cases}$$

Appliquant ces conditions, on obtient:

$$C_1 = T_1 \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

d'où:

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 \tag{2.20}$$

Le flux de chaleur est constant en régime permanent et la loi élémentaire de Fourier permet de l'exprimer:

$$\Phi = Q = -k S \frac{dT}{dx} \tag{2.21}$$

$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L}$ est la pente de la droite représentée en figure 2.6.

et donc:

$$\Phi = Q = kS \frac{T_1 - T_2}{L}$$

Exemple 2.2:

La densité du flux thermique à travers un mur plan d'épaisseur 50mm est $70W/m^2$. *Calculez la différence de température aux surfaces du mur et les valeurs numériques du gradient de température dans celui-ci si ce mur est en (a) en laiton* $(k = 100W/mK)$, *(b) granit* $(k = 2{,}5W/mK)$ *et (c) en bois* $(k = 0{,}23W/mK)$.

Solution:

(a) mur en laiton :

• $\varphi = \frac{\Phi}{S} = \frac{k}{e}\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{\varphi e}{k} = \frac{70 \text{x} 0.05}{100} = \underline{0{,}035\,K}$

• $|Grad\,\text{T}| = \left|\frac{dT}{dx}\right| = \frac{\Delta T}{e} = \frac{0,035}{0,05} = \underline{0,7\ K/m}$

(b) <u>mur en granit :</u>

• $\Delta T = \frac{70\text{x}0.05}{2,5} = \underline{1,4\ K}$; • $|Grad\,\text{T}| = \frac{1,4}{0,05} = \underline{28\ K/m}$

(c) <u>mur en bois :</u>

• $\Delta T = \frac{70\text{x}0.05}{0,23} = \underline{15,2\ K}$; • $|Grad\,\text{T}| = \frac{15,2}{0,05} = \underline{303,3\ K/m}$

Le bois montre une bonne aptitude pour l'isolation suivi par le granit et enfin par le laiton. Ce dernier ne fait "descendre" la température que de $0,7K$ par mètre de matériau (comparé aux $28K$ et $304,3K$ du granit et du bois respectivement).

2.5 Convection de la chaleur des surfaces

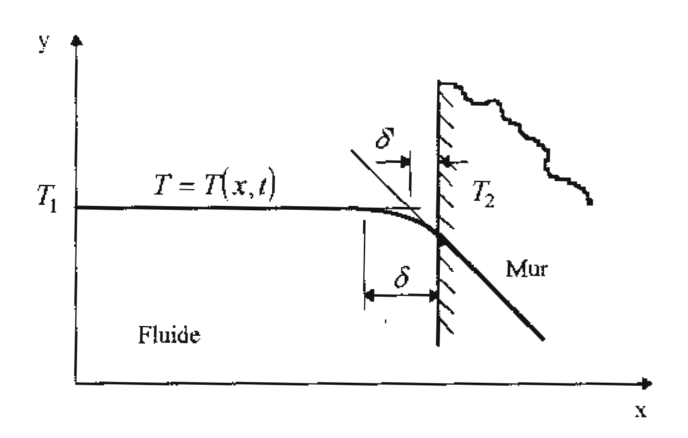


Figure 2.7: Distribution de la température à travers un film mince de fluide adhérant à une paroi solide

Bien que le problème de la conduction ait pour objectifs principaux la détermination de la distribution de la température dans les corps ainsi que celle du flux de chaleur, les conditions de surface sont importantes.

Dans le cas où un fluide s'écoule sur une surface solide, la distribution de la température est celle illustrée par la figure 2.7. Au sein du milieu fluide, le gradient de température est confiné à une couche mince située près du mur alors que plus loin de cette paroi, la température peut être considérée constante.

Dans le but de simplifier la distribution de la température, son profil est remplacé par une droite illustrée en pointillé sur la figure 2.7. Physiquement, ceci suppose qu'un film mince d'épaisseur δ' adhère au mur et c'est à travers ce dernier que l'évolution de température prend place. Le profil de cette dernière étant assumé représenté par une droite, on peut supposer que le transfert de chaleur se réalise sous forme de conduction comme dans le cas d'un mur solide. Ceci simplifie énormément les mécanismes réels qui prennent place et permet d'écrire:

$$Q=\frac{k_{fluide}}{\delta'}\,S\left(T_{fluide}-T_{surface}\right) \qquad (2.22)$$

La quantité de chaleur Q peut donc être déterminée si δ' est connue. Ce dernier paramètre dépend de plusieurs facteurs dont la vitesse du fluide, la forme de la surface ainsi que sa structure. En pratique, on préfère travailler avec le rapport $\left(k_{fluide}/\delta'\right)$ plutôt que δ'. Si on note:

$$h=\frac{k_{fluide}}{\delta'} \qquad (2.23)$$

h représentant le coefficient de transfert de la chaleur par convection.

On aboutit à une relation exprimant le flux de chaleur échangé par convection entre un fluide et une paroi solide:

$$\Phi = h\,S\,\Phi = h\,S\left(T_f - T_m\right) \qquad (2.24)$$

qui est la loi de Newton.

2.6 Rayonnement de la chaleur des surfaces

Le flux de chaleur rayonné par un milieu de surface S et de température T s'exprime grâce à la loi de Stefan-Boltzman:

$$\Phi = \sigma\,S\,T^4 \qquad (2.25)$$

où: σ : Constante de Stefan-Boltzman.

2.7 Exemples

L'application des principes précédemment énoncés peut être mieux perçue par l'introduction d'exemples.

2.7.1 Mur en contact avec deux fluides : analogie électrique

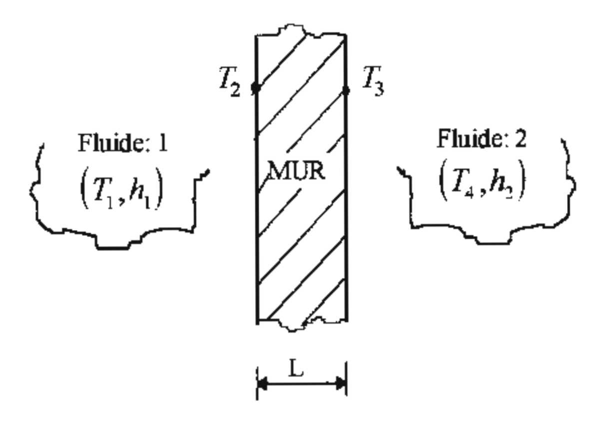


Figure 2.7: Mur simple en contact avec deux fluides

Soit le mur d'épaisseur L et de conductibilité thermique k tel qu'illustré par la figure 2.7.

La conservation du flux thermique impose:

$$\Phi = h_1\, S\left(T_1 - T_2\right) = k\,\frac{S}{L}\left(T_2 - T_3\right) = h_2\, S\left(T_3 - T_4\right) \tag{2.26}$$

qui peut s'écrire:

$$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{\dfrac{1}{h_1\, S}} = \frac{T_2 - T_3}{\dfrac{L}{k\, S}} = \frac{T_3 - T_4}{\dfrac{1}{h_2\, S}}$$

d'où:

$$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{cv1}} = \frac{T_2 - T_3}{R_{cd}} = \frac{T_3 - T_4}{R_{cv2}} = \frac{T_1 - T_4}{R_{cv1} + R_{cd} + R_{cv2}} \tag{2.27}$$

où par analogie avec l'électricité, R_{cv1}, R_{cd} et R_{cv2} sont appelés les **résistances thermiques.**

La loi de Fourier ainsi que celle de Newton exprimant les quantités de chaleur transmises par conduction et par convection respectivement peuvent donc être comparées à celle d'Ohm qui exprime la différence de potentiel entre deux points d'un réseau électrique en fonction de sa résistance et de l'intensité du courant qui le traverse. Ainsi:

$$\begin{array}{cccccl}
\dfrac{L}{k\,S} & \Phi & = & T_1 - T_2 & : & \text{Loi de Fourier} \\
\dfrac{1}{h\,S} & \Phi & = & T_1 - T_2 & : & \text{Loi de Newton} \\
\updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow\ \updownarrow & & \\
R & I & = & U_1 - U_2 & : & \text{Loi d'Ohm}
\end{array}$$

2.7.2 Mur composé

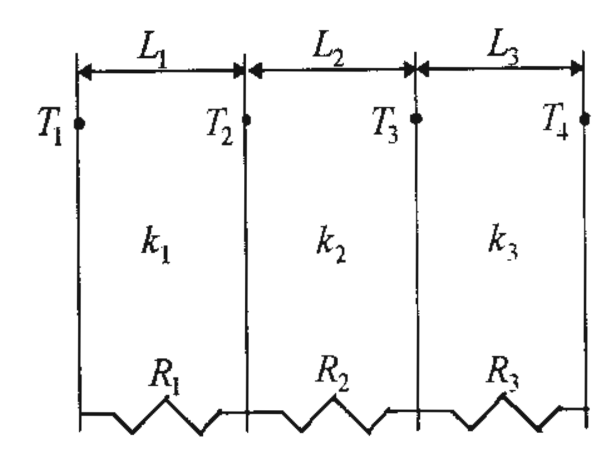


Figure 2.8: Mur composé et son schéma électrique

La conservation du flux de chaleur implique:

$$\Phi = k_1 \frac{S}{L_1}(T_1 - T_2) = k_2 \frac{S}{L_2}(T_2 - T_3) = k_3 \frac{S}{L_3}(T_3 - T_4) \qquad (2.28)$$

$$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{\dfrac{L_1}{k_1 S}} = \frac{T_2 - T_3}{\dfrac{L_2}{k_2 S}} = \frac{T_3 - T_4}{\dfrac{L_3}{k_3 S}} = \frac{T_1 - T_2}{R_1} = \frac{T_2 - T_3}{R_2} = \frac{T_3 - T_4}{R_3}$$

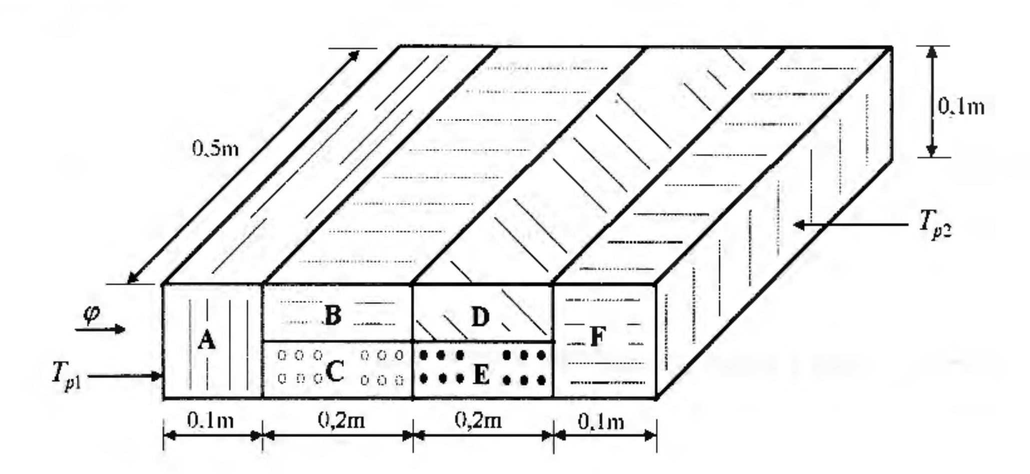
$$\Phi = \frac{T_1 - T_2 + T_2 - T_3 + T_3 - T_4}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{T_1 - T_4}{R} \qquad (2.29)$$

avec:

$$\begin{cases} R = R_1 + R_2 + R_3 \\ R = \sum_i R_i \end{cases}$$

Le mur composé se comporte donc comme un mur simple de résistance thermique $R = R_1 + R_2 + R_3$.

Exemple 2.3:



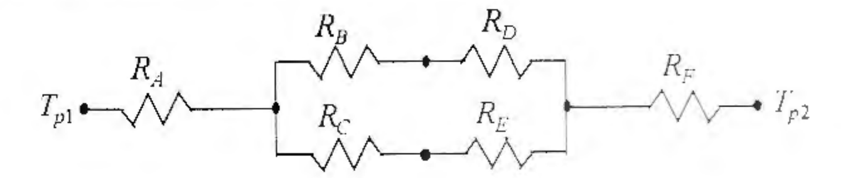
Soit le mur composé illustré ci-dessus. En assumant une conduction unidimensionnelle et connaissant les températures aux parois T_{p1} et T_{p2} ainsi que les conductibilités thermiques de ses différentes sections, calculez le flux de chaleur par unité de surface à travers le mur.

Données:

$$\begin{cases} T_{p1} = 1850°C \;;\; kA = 180W/mK \;;\; kC = 90W/mK \;;\; kE = 120W/mK \\ T_{p2} = 25°C \;;\; kB = 45W/mK \;;\; kD = 60W/mK \;;\; kF = 165W/mK \end{cases}$$

Solution:

L'analogie existant entre les grandeurs thermiques et électriques nous permet de représenter le schéma équivalent au mur considéré.



Le flux s'exprime donc:

$$\Phi = \frac{T_{p1} - T_{p2}}{R_A + R_{eq} + R_F}$$

avec:

$$\begin{cases} R_A = \frac{L_A}{k_A\, S_A} = \frac{0{,}1}{180 \text{x} 0{,}01 \text{x} 0{,}5} = 0{,}111\, K/W & , R_B = \frac{L_B}{k_B\, S_B} = \frac{0{,}2}{45 \text{x} 0{,}005 \text{x} 0{,}5} = 1{,}777\, K/W \\ R_C = \frac{L_C}{k_C\, S_C} = \frac{0{,}2}{90 \text{x} 0{,}005 \text{x} 0{,}5} = 0{,}888\, K/W & , R_D = \frac{L_D}{k_D\, S_D} = \frac{0{,}2}{60 \text{x} 0{,}005 \text{x} 0{,}5} = 1{,}333\, K/W \\ R_E = \frac{L_E}{k_E\, S_E} = \frac{0{,}2}{120 \text{x} 0{,}005 \text{x} 0{,}5} = 0{,}666\, K/W & , R_F = \frac{L_F}{k_F\, S_F} = \frac{0{,}1}{165 \text{x} 0{,}01 \text{x} 0{,}5} = 0{,}121\, K/W \end{cases}$$

d'où:

$$R_{eq} = \frac{(R_B + R_D)(R_C + R_E)}{R_B + R_D + R_C + R_E} = 1{,}036 K/W$$

Finalement:

$$\Phi = \frac{1850 - 25}{0{,}111 + 1{,}036 + 0{,}121} = 1437 \text{ Watts}$$

2.7.3 Cylindre creux à surfaces latérales isothermes

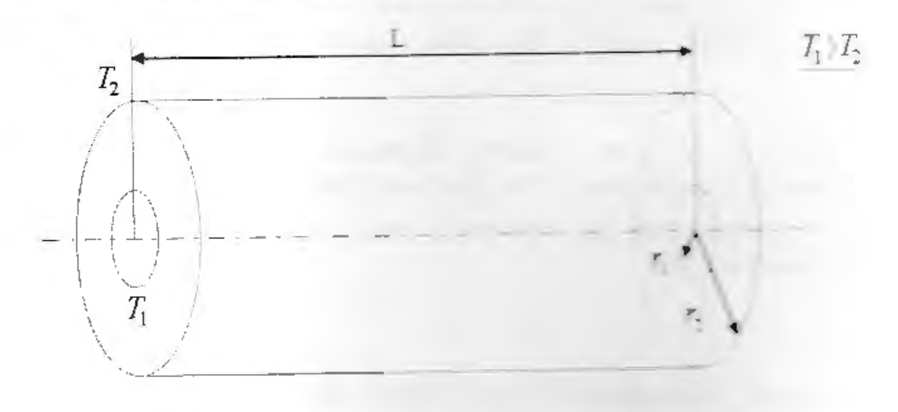


Figure 2.10: Cylindre creux à surfaces latérales isothermes

L'équation générale de la conduction en coordonnées cylindriques s'écrit (c.f. équation 2.15):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{Q'}{\rho c}$$

Dans le cas où le transfert se fait dans une seule direction (r par exemple), ne dépend pas du temps ($\partial / \partial t = 0$) et qu'il n'existe pas de sources de chaleur ($Q' = 0$), l'équation devient:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \qquad (2.30)$$

avec les conditions aux limites:

$$\begin{cases} \bullet\ T(r = r_1) = T_1 \\ \bullet\ T(r = r_2) = T_2 \end{cases}$$

L'équation (2.30) peut aussi être exprimée comme:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0 \qquad (2.31)$$

et sa solution est:

$$r\frac{dT}{dr} = C_1 \quad \Rightarrow \quad T = C_1\,Ln(r) + C_2 \qquad (2.32)$$

Les conditions aux limites:

$$\begin{cases} r = r_1 :\ T_1 = C_1\,Ln(r_1) + C_2 \\ r = r_2 :\ T_2 = C_1\,Ln(r_2) + C_2 \end{cases}$$

permettent d'exprimer les constantes d'intégration:

$$C_1 = \frac{T_1 - T_2}{Ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \qquad (2.33)$$

$$C_2 = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{Ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \qquad (2.34)$$

La température sera décrite par l'expression:

$$T = C_1\,Ln(r) + C_2$$

En remplaçant dans l'expression de la température décrite par l'équation (2.32), il vient:

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{Ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} Ln(r) + T_1 - \frac{T_1 - T_2}{Ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} Ln(r_1)$$

qui peut s'exprimer sous la forme:

$$T = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{Ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} Ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \qquad (2.35)$$

On peut déduire l'expression de la densité du flux thermique:

$$\varphi = -k \frac{dT}{dr} = -k \frac{T_1 - T_2}{Ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \frac{1}{r} \qquad (2.36)$$

ainsi que celle du flux thermique:

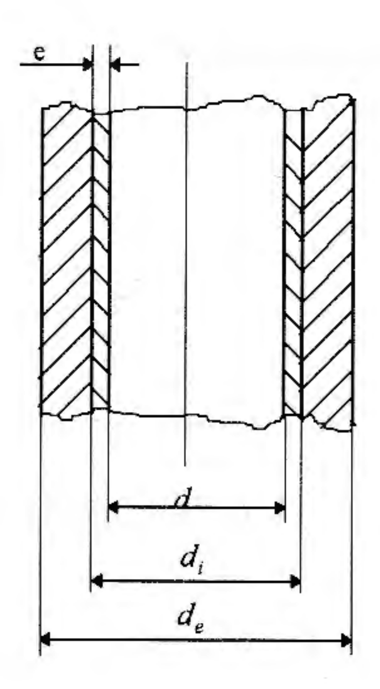
$$\Phi = \varphi S = -k \frac{T_1 - T_2}{Ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \frac{1}{r} 2\pi Lr = 2\pi kL \frac{T_1 - T_2}{Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \qquad (2.37)$$

et aussi celle de la résistance thermique pour un cylindre creux:

$$R = \frac{Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi kL} \qquad (2.38)$$

Exemple 2.4:

Une cheminée en bèton armè $\left(k_1 = 1{,}1\ W/m^\circ C\right)$ *possède un diamètre intérieur* $d_i = 600mm$ *et un diamètre extérieur* $d_e = 1000mm$ *doit être revétue de l'intérieur par un matériau réfractaire* $\left(k_2 = 0{,}5\ W/m^\circ C\right)$. *Déterminez: (a) l'épaisseur du garnissage, (b) la température de la surface extèrieure de la cheminée pour que les pertes thermiques ne dépassent pas* $2000\ W/m$ *et que la température de la surface intérieure de la paroi en béton armé ne dépasse pas* $200^\circ C$. *La température de la surface interne du garnissage est prise égale à* $425^\circ C$.



Solution:

(a) Le flux de chaleur à travers le garnissage s'exprime: $Q = \dfrac{T_p - T_{pi}}{R}$

avec: $$R = \frac{Ln\left(\dfrac{d_i}{d}\right)}{2\ \pi\, k_2\, L}$$

Le flux par unité de longueur s'exprime donc: $$Q\,/\,m = \frac{2\ \pi\, k_2}{Ln\left(\dfrac{d_i}{d}\right)} \frac{T_p}{T_{pi}}$$

et entraîne que: $$d = \frac{d_i}{e^{\left[\frac{\left(T_p - T_{pi}\right)2\pi k_2}{Q}\right]}} = \frac{600}{e^{\left[\frac{(425-200)2x\pi 0.5}{2000}\right]}} = 421{,}36\ mm$$

aboutissant à: $$e = \frac{600 - 421{,}36}{2} = \underline{89\ mm}$$

(b) Le flux étant conservé, la quantité de chaleur traversant la paroi en béton armé s'exprimera:

$$Q = \frac{2\pi\, k_2}{Ln\left(\dfrac{d_e}{d_i}\right)}\left(T_{pi} - T_{pe}\right)$$

ce qui entraîne que:

$$T_{pe} = T_{pi} - \frac{Ln\left(\dfrac{d_e}{d_i}\right)Q}{2\pi\, k_1} = 200 - \frac{Ln\left(\dfrac{1000}{600}\right)x2000}{2x\pi x1{,}1} = \underline{52^{\circ}C}$$

2.7.4 Sphère creuse à surfaces isothermes

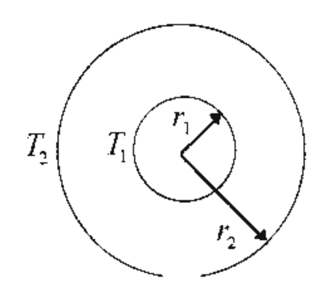


Figure 2.11: Sphère creuse à surfaces isothermes

En coordonnées sphériques, l'équation générale de la conduction s'écrit (cf. équation 2.16):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin(\psi)} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\sin(\psi) \frac{\partial T}{\partial \psi} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2(\psi)} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right\} + \frac{Q'}{\rho c}$$

Dans le cas stationnaire $(\partial / \partial t = 0)$, unidimensionnel $(\partial / \partial \psi = \partial / \partial \varphi = 0)$ et sans sources $(Q' = 0)$, l'équation se réduit à:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\,T)}{\partial r^2} = 0 \tag{2.39}$$

qui peut s'écrire:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{d}{dr} (r\,T) \right] = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[T + r \frac{dT}{dr} \right] = \frac{1}{r} \left(\frac{dT}{dr} + \frac{dT}{dr} + r \frac{d^2T}{dr^2} \right) = 0$$

On aboutit finalement à:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \tag{2.40}$$

avec les conditions aux limites:

$$\begin{cases} T(r = r_1) = T_1 \\ T(r = r_2) = T_2 \end{cases}$$

La solution peut être recherchée en posant:

$$U = \frac{dT}{dr} \tag{2.41}$$

L'équation se transformera alors:

$$rU' + 2U = 0 \tag{2.42}$$

La solution recherchée aura la forme:

$$U = \frac{C_1}{r^2} \tag{2.43}$$

d'où:

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 \tag{2.44}$$

Les conditions aux limites:

$$T_1 = -\frac{C_1}{r_1} + C_2 \qquad \text{et} \qquad T_2 = -\frac{C_1}{r_2} + C_2$$

permettront de trouver les expressions des constantes:

$$C_1 = -\frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \tag{2.45}$$

$$C_2 = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) r_1} \tag{2.46}$$

et l'expression finale de la température sera:

$$T(r) = T_1 + \left(T_1 - T_2\right) \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \tag{2.47}$$

Trouvons l'expression du flux thermique. Il s'exprime :

$$\Phi = -k\, S\, \frac{dT}{dr} \tag{2.48}$$

avec:

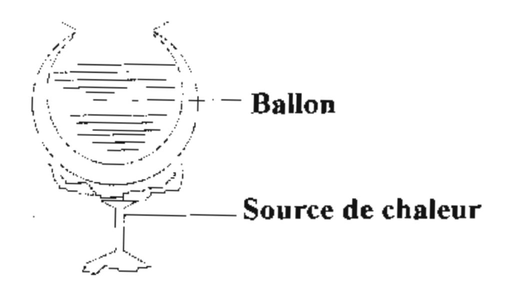
$$\frac{dT}{dr} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(-\frac{1}{r_2}\right)$$

Finalement:

$$\Phi = -k\, S\, \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(-\frac{1}{r_2}\right) \tag{2.49}$$

Exemple 2.5:

Un ballon utilisé en laboratoire et contenant une huile moteur est soumis à une source de chaleur (voir figure ci-dessous). Le ballon en verre $(k = 0{,}80\ W / m^{\circ}C)$ *est assimilé à une sphère dont les diamètres intérieur et extérieur sont respectivement égaux à 20cm et 21cm. L'huile et l'air environnant possèdent des coefficients de convection respectivement égaux à* $15\ W / m^{2\circ}C$ *et* $10\ W / m^{2\circ}C$.



Il est demandé de calculer le flux thermique que doit fournir la source de chaleur afin de garder la température de l'huile constante à $80^{\circ}C$. *On prendra la température ambiante égale à* $20^{\circ}C$ *et on négligera les pertes par le haut du ballon.*

Solution:

L'apport de chaleur nécessaire pour maintenir la température de l'huile constante à $80^{\circ}C$ doit être au moins égal aux pertes subies par le ballon.

R_{cv1} R_{cd} R_{cv2}

T_h T_a

Le flux s'exprime (c.f. figure ci-dessus):

$$\Phi = \frac{T_h - T_a}{R_{cv1} + R_{cd} + R_{cv2}}$$

avec:

- $R_{cv1} = \dfrac{1}{h_h.4.\pi.r_1^2} = \dfrac{1}{15.4.\pi.(0{,}1)^2} = 0{,}530\ ^{\circ}C/W$

- $R_{cv2} = \dfrac{1}{h_a.4.\pi.r_2^2} = \dfrac{1}{10.4.\pi.(0{,}105)^2} = 0{,}722\ ^{\circ}C/W$

- $R_{cd} = \dfrac{r_2^2\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)}{k.4.\pi.r_1^2} = \dfrac{1}{0{,}8.4.\pi.(0{,}1)^2} = 0{,}520\ ^{\circ}C/W$

Finalement :

$$\Phi = \frac{80 - 20}{0{,}530 + 0{,}052 + 0{,}722} = \underline{46\ Watts}$$

2.8 Problème de conduction unidimensionnelle avec déperdition à travers les surfaces latérales

2.8.1 Equation générale

Ce cas représente le problème type de conduction dans un solide (refroidissement par ailettes, fils chauds d'anémométrie etc.). Il existe dans les corps longs ($x \succ\succ y$ et z) et le transfert se réalise par la surface latérale.

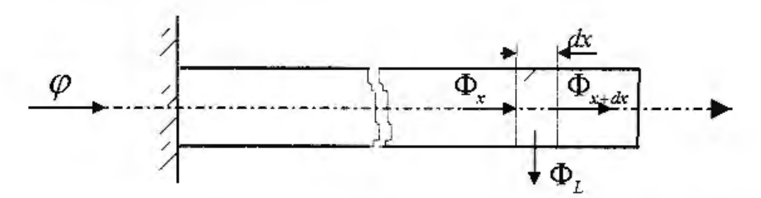


Figure 2.12: Bilan thermique à travers un élément infinitésimal de tige mince

Soit la tige représentée en figure 2.12 dont la longueur est assumée très grande devant ses dimensions latérales. Elle possède une extrémité chauffée en permanence. La chaleur se propage dans la tige et se déverse dans le milieu ambiant.

Soient:

- p: le périmètre de la section droite de la tige,
- k: sa conductivité thermique,
- h: son coefficient d'échange convectif,
- T_a: la température ambiante,
- S: la surface de la section droite de la tige.

Dans les différents cas étudiés précédemment, la formulation générale n'introduisait pas les conditions de surface et les effets des échanges périphériques. Afin d'être en mesure de les prendre en considération, considérons un élément de volume (Sdx) et faisons son bilan énergétique. Le premier principe de la thermodynamique nous dicte:

$$\Phi_x - \Phi_{x+dx} - \Phi_L + Q' S dx = 0 \tag{2.50}$$

Appliquons la relation de Fourier pour chaque flux:

$$-k\,S\left(\frac{dT}{dx}\right)_x + k\,S\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - h\,p\,dx\left[T(x) - T_a\right] + Q' S\,dx = 0$$

$$-kS\left(\frac{dT}{dx}\right)_x + kS\left[\left(\frac{dT}{dx}\right)_x + \frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right)_x dx\right] - hpdx\left[T(x) - T_a\right] + Q'Sdx = 0$$

En développant, simplifiant et arrangeant l'expression précédente, on arrive à l'équation décrivant le transfert à travers la tige représentée en figure 2.12:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - m^2\left[T(x) - T_a\right] = 0 \tag{2.51}$$

avec:

$$m^2 = \frac{h\,p}{k\,S} \qquad (2.52)$$

Remarques:

1- C'est une équation importante, souvent appliquée pour les tubes et les fils possédant une section constante avec h et k constants.

2- C'est une équation différentielle de deuxième ordre à coefficients constants dont la solution générale est recherchée sous la forme:

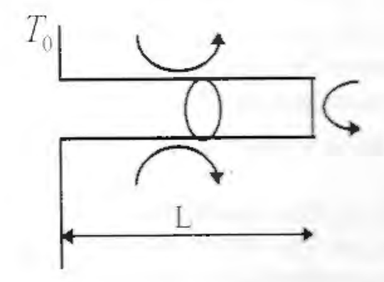
$$T(x) - T_a = A\;ch(mx) + B\;sh(mx) \qquad (2.53)$$

ou:

$$T(x) - T_a = C\;e^{\ mx} + D\;e^{mx} \qquad (2.54)$$

3- Les conditions aux limites permettront de déterminer les valeurs des constantes pour chaque cas particulier.

2.8.2 Solution élémentaire pour les ailettes unidimensionnelles



L'ailette représentée ci-dessus peut être assimilée à une tige courte. Tout le flux n'est pas dissipé par sa surface latérale mais sa section droite extrême est également traversée par un flux convectif.

L'équation générale décrivant ce phénomène est celle notée (2.51):

$$\frac{d^2T}{dx^2} - m^2\left[T(x) - T_a\right] = 0$$

et sa solution générale est:

$$T(x) - T_a = A\;ch(mx) + B\;sh(mx)$$

Les conditions aux limites imposent:

- A $\underline{x = 0}$: $T(0) = T_0 \;\Rightarrow\; A = T_0 - T_a$

- A $\underline{x = L}$: le flux convectif est égal au flux transmis par conduction à travers la section droite.

donc:

$$hS\left[T(L) - T_a\right] = -kS\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L}$$

$$h\left[T(L) - T_a\right] = h\left(T_0 - T_a\right)ch(mL) + hBsh(mL)$$

En procédant à la différence entre les équations (2.57) et (2.58) et en simplifiant, on aboutit à l'expression de B:

$$B = \frac{\left[-hch(mL) - kmsh(mL)\right]\left(T_0 - T_a\right)}{hsh(mL) + kmch(mL)} \tag{2.59}$$

d'où la solution:

$$T(x) - T_a = \left(T_0 - T_a\right)\left[ch(mx) - \frac{\frac{h}{km}ch(mL) + sh(mL)}{\frac{h}{km}sh(mL) + ch(mL)}sh(mx)\right] \tag{2.60}$$

En posant $G = \frac{h}{km}$, en simplifiant et en arrangeant, on aboutit à l'expression de l'équation générale décrivant l'évolution de la température dans une ailette:

$$\frac{T(x) - T_a}{T_0 - T_a} = \frac{Gsh\left[m(L-x)\right] + ch\left[m(L-x)\right]}{ch(mL) + Gsh(mL)} \tag{2.61}$$

Le flux total dissipé est représenté par la somme des flux dissipés par convection à travers la section droite extrême et la surface latérale. Il s'exprime:

$$\Phi_{total} = hS\left[T(L) - T_a\right] + \int_0^L hp\left[T(x) - T_a\right]dx \tag{2.62}$$

Dans le présent exemple où le régime est permanent, le flux total dissipé est égal à celui transféré par conduction à travers la section de l'ailette:

$$\Phi_{total} = -kS\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = kmS\left(T_0 - T_a\right)\frac{sh(mL) + Gch(mL)}{ch(mL) + Gsh(mL)} \tag{2.63}$$

Finalement après arrangement, le flux aura pour expression:

$$\Phi_{total} = k\,m\,S\left(T_0 - T_a\right)\frac{th(mL) + G}{1 + G\,th(mL)} \tag{2.64}$$

2.8.3 Efficacité d'une ailette

La qualité d'une ailette est caractérisée par le rapport de sa performance effective à celle d'une ailette idéale de température uniforme égale à sa température de sa base. Une

telle ailette dégagerait un flux de chaleur de:

$$\Phi_{maximum} = h\,p\,L\left(T_0 - T_a\right) \tag{2.65}$$

et son efficacité sera définie comme:

$$\varepsilon = \frac{\Phi_{réel\ échangé}}{\Phi_{maximum\ échangeable}} \tag{2.66}$$

$$\varepsilon = k\,m\,S\left(T_0 - T_a\right)\frac{th(mL)+G}{1+G\,th(mL)}\frac{1}{hpL\left(T_0 - T_a\right)}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par (m/hp) et en simplifiant, on aboutit à:

$$\varepsilon = \frac{th(mL)+\dfrac{h}{km}}{mL+\dfrac{hL}{k}th(mL)} \tag{2.67}$$

Exemple 2.6:

Soit une ailette droite de section circulaire de diamètre 2cm et de longueur 10cm exposée à un écoulement convectif avec $h = 25W/m^2K$. Il est demandé de comparer la distribution de la température dans cette ailette, ainsi que l'écoulement de la chaleur et les efficacités pour trois matériaux différents: (a) l'aluminium avec $k = 200W/mK$, (b) l'acier inoxydable avec $k = 16W/mK$ et (c) le verre avec $k = 1,2W/mK$.

Solution:

- La distribution de la température est calculée grâce à l'équation (2.61):

$$\frac{T(x)-T_a}{T_0-T_a} = \frac{G\,sh\left[m(L-x)\right]+ch\left[m(L-x)\right]}{ch(mL)+G\,sh(mL)}$$

avec:

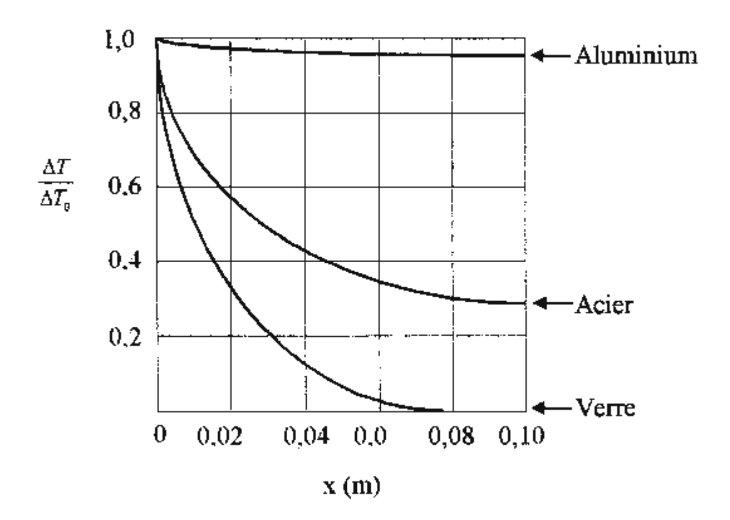
$$m = \sqrt{\frac{hp}{kS}} = \sqrt{\frac{25.\pi.0,02}{k.\pi.(0,01)^2}} = \sqrt{\frac{5000}{k}} \quad \text{et} \quad G = \frac{h}{km} = \frac{25}{km}$$

d'où:

	m	mL	G
Aluminium	5,00	0,500	0,025
Acier	17,68	1,768	0,088
Verre	64,55	6,455	0,323

et la distribution de la température $(\Delta T / \Delta T_0)$ peut donc être calculée. Les résultats d'un tel calcul sont résumés dans le tableau ci-dessous.

x(m)	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
Aluminium	1,00	0,957	0,924	0,899	0,88	0,877
Acier	1,00	0,719	0,530	0,407	0,33	0,306
Verre	1,00	0,275	0,076	0,021	0,00	0,002



• L'équation (2.64) permet de déterminer le flux de chaleur dissipée par l'ailette (par souci de comparaison, on considérera que le flux dissipé par l'ailette en aluminium est égal à l'unité, 100%), tandis que l'équation (2.67) permet de calculer les efficacités. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Expression du flux dissipé: $\Phi_{total} = k\,mS\left(T_0 - T_a\right)\dfrac{th(mL)+G}{1+G\,th(mL)}$

Expression de l'efficacité: $\varepsilon = \dfrac{th(mL)+\dfrac{h}{km}}{mL+\dfrac{hL}{k}th(mL)}$

	Flux: Φ_{total} (%)	Efficacité: ε
Aluminium	100	0,96
Acier	55,9	0,54
Verre	16,1	0,15

On notera que l'ailette en verre possède la variation la plus importante à la base $(0 \le x \le 0{,}06)$ tandis que son flux est le moins important.

2.9 Conduction bi-dimensionnelle, stationnaire, sans sources Application de la méthode de séparation des variables

Pour un corps isotrope et homogène, en régime permanent et sans sources de chaleur, l'équation générale de la conduction se réduit à:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{2.68}$$

y
b
$T(x,b) = f(x)$
$T(0,y) = 0$
$T(a,y) = 0$
0
$T(x,0) = 0$
a x

Figure 2.14: Domaine illustrant la conduction thermique bi-dimensionnelle

Essayons d'intégrer cette équation pour un domaine rectangulaire en utilisant la méthode de séparation des variables. Les conditions aux limites sont:

$$T(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ et } 0 \leq y \leq b \\ 0 & \text{si } x = a \text{ et } 0 \leq y \leq b \\ 0 & \text{si } y = 0 \text{ et } 0 \leq x \leq a \\ f(x) & \text{si } y = b \text{ et } 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

Séparons les variables:

$$T(x,y) = X(x).Y(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = Y\frac{d^2 X}{dx^2} \text{ et } \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = X\frac{d^2 Y}{dy^2}$$

Remplaçons dans l'équation (2.68):

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} = \text{Cste} = -\lambda$$

Il est remarquable que les équations ci-dessus sont égales malgré le fait que l'une dépend uniquement de x et l'autre uniquement de y. Ceci ne peut évidemment être vérifié que si les deux étaient égales à une constante qu'on a nommé λ. Ces égalités nous mènent donc vers le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0 \text{ avec } X(0) = X(a) = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda Y = 0 \text{ avec } Y(0) = 0 \text{ et } Y(b) = f(x) \end{cases} \tag{2.71}$$

L'équation en x est un système appelé de Sturn-Liouville. Ses solutions non nulles sont recherchées sous la forme:

$$X = Ae^{mx} \Rightarrow \frac{dX}{dx} = mAe^{mx} \text{ et } \frac{d^2X}{dx^2} = m^2Ae^{mx}$$

L'équation en x devient:

$$m^2Ae^{mx} + \lambda Ae^{mx} = 0$$

$$\left(m^2 + \lambda\right)Ae^{mx} = 0 \qquad (2.72)$$

x appartenant au domaine $[0,a]$, e^{mx} ne peut être nulle et donc:

$$m^2 + \lambda = 0 \qquad (2.73)$$

Trois cas se présentent:

1er cas: $\lambda \prec 0$

On pose: $\lambda = -k^2 \Rightarrow m^2 - k^2 = 0 \Rightarrow m = \pm k$

La solution aura la forme:

$$X = A_1e^{kx} + A_2e^{-kx}$$

Recherchons les valeurs des constantes en appliquant les conditions aux limites:

$$\begin{cases} X(0) = 0 = A_1 + A_2 \Rightarrow A_1 = -A_2 \\ \mathrm{X(a)} = \mathrm{A}_1e^{ka} + A_2e^{-ka} = A_1\left(e^{ka} - e^{-ka}\right) = 0 \end{cases}$$

donc: $A_1 = 0$ et $A_2 = 0 \Rightarrow X = 0$

Cette solution ne peut être acceptée.

2ème cas: $\lambda = 0$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = 0 \Rightarrow X = A_1x + A_2$$

Recherchons les valeurs des constantes en appliquant les conditions aux limites:

$$\begin{cases} X(0) = 0 = A_2 \\ X(a) = A_1a = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = 0$$

Cette solution ne peut être acceptée non plus.

3ème cas: $\lambda \succ 0$

On pose: $\lambda = k^2 \Rightarrow m^2 + k^2 = 0 \Rightarrow m = \pm ik$

La solution aura la forme:

$$X = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx) \tag{2.74}$$

Recherchons les valeurs des constantes en appliquant les conditions aux limites:

$$\begin{cases} X(0) = 0 = A_1 \\ \text{X(a)} = A_2 \sin(ka) \end{cases} \tag{2.75}$$

Afin d'aboutir à une solution non triviale, A_2 doit impérativement être prise différente de 0. Donc:

$$\sin(ka) = 0 \Rightarrow ka = n\pi \text{ et } k = \frac{n\pi}{a} \text{ , } n = 0,1,\ldots \tag{2.76}$$

Ceci introduit une infinité de solutions non nulles de la forme:

$$X_n(x) = A_2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)x = A_2 \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\pi\right) \tag{2.77}$$

Remarques:

1- λ_n forme l'ensemble des valeurs propres du système et X_n ses vecteurs propres,

2 - $\{X_n\}$ forme un ensemble orthogonal, c'est à dire que:

$$\int_0^a X_m(x).X_n(x).dx = 0 \text{ si } m \neq n$$

Pour les valeurs de λ_n, l'équation possède comme solution:

$$Y_n(y) = A_n e^{\left(-\frac{n\pi}{a}y\right)} + B_n e^{\left(\frac{n\pi}{a}y\right)} \tag{2.78}$$

$$Y_n(y) = C_n ch\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + D_n sh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \tag{2.79}$$

Recherchons les valeurs des constantes en appliquant les conditions aux limites:

$$Y(0) = C_n = 0 \Rightarrow Y_n(y) = D_n sh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \tag{2.80}$$

Il existe donc une infinité de solutions telles que:

$$T(x,y) = X(x).Y(y) = E_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) sh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \text{ , } n = 0,1,\ldots \tag{2.81}$$

Il existe donc suivant la valeur de n une infinité de solutions qui satisfont les trois conditions aux limites $x = 0$, $x = a$ et $y = 0$. La solution générale est donc une combinaison linéaire de ces solutions particulières. Elle s'exprime:

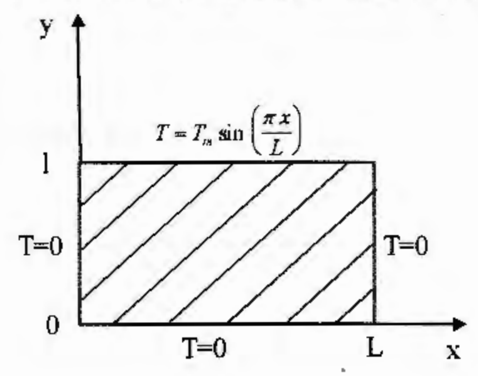
$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) sh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

La constante E_n est choisie de telle façon que la dernière condition aux limites s'exprimant:

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) sh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = f(x) \quad \text{soit vérifiée.}$$

Exemple 2.7:

Soit la plaque rectangulaire illustrée ci-dessous. Il est demandé de déterminer la distribution de la température dans cette plaque en fonction de x et y.



Solution:

En procédant à la séparation des variables et en remplaçant dans l'équation générale de la conduction, on aboutit au système de Sturn-Liouville:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \\ \dfrac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \end{cases}$$

dont la solution générale s'exprime:

$$\begin{cases} X = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \\ Y = Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y} \end{cases}$$

entrainant l'expression de la température:

$$T(x,y) = X.Y = \left[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\right]\left[Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y}\right]$$

Les conditions aux limites permettront d'évaluer les constantes:

$$\begin{cases} T_{y=0} = 0 \Rightarrow [A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)][C+D] = 0 \Rightarrow C = -D \\ T_{x=0} = 0 \Rightarrow A\left(Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y}\right) = AC\left(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}\right) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ T_{x=L} = 0 \Rightarrow [B\sin(\lambda L)]C\left(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}\right) = 2BC\sin(\lambda L)sh(\lambda y) = 0 \end{cases}$$

La solution de cette dernière équation impose que $\sin(\lambda L)$ soit nul c'est-à-dire que $\lambda = \frac{n\pi}{L}$ avec $n = 1,2,\ldots$ d'où l'existence d'une infinité de solutions dont la somme est aussi solution de cette équation. Cette dernière s'exprime:

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathrm{L}}\right) sh\left(\frac{n\pi\, y}{\mathrm{L}}\right)$$

La dernière condition aux limites permet l'évaluation de la constante C_n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathrm{L}}\right) sh\left(\frac{n\pi\, l}{\mathrm{L}}\right) = T_m \sin\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right)$$

et impose que seule la constante C_1 est nécessaire. Elle s'exprime:

$$C_1 = \frac{T_m}{sh\left(\frac{\pi l}{\mathrm{L}}\right)}$$

et la distribution de la température s'exprime finalement comme:

$$T(x,y) = T_m \frac{sh\left(\frac{\pi y}{\mathrm{L}}\right)}{sh\left(\frac{\pi l}{\mathrm{L}}\right)} \sin\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right)$$

2.10 Conduction unidimensionnelle en régime variable sans source Application de la transformée de Laplace

2.10.1 Généralités sur la transformée de Laplace

La transformée de Laplace notée $\overline{T}(x,p)$ d'une fonction $T(x,t)$ est définie par:

$$\overline{T}(x,p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}\, T(x,t)\,dt$$

avec:
- p: nombre réel ou complexe,
- $\overline{T}(x,p)$: Image ou transformée de la fonction $T(x,t)$.

2.10.2 Application de la transformée de Laplace à l'équation unidimensionnelle de la chaleur en régime variable

L'équation générale de la conduction s'exprime (cf. équation 2.13):

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{k}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\frac{Q'}{\rho c}$$

En unidimensionnel ($\partial/\partial y=\partial/\partial z=0$) et sans sources ($Q'=0$), l'équation se simplifie pour s'écrire:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathrm{t}}=\frac{k}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

ou: $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \mathrm{t}} \tag{2.85}$$

Nous sommes donc confrontés à une équation différentielle aux dérivées partielles. Appliquons la transformée de Laplace à l'équation précédente (2.85):

$$\int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dt-\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial T}{\partial t}dt=0$$

Une intégration par parties permet d'aboutir à:

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty e^{-pt}\,T(x,t)\,dt-\frac{1}{\alpha}\left\{\left[e^{-pt}\,T(x,t)\right]_0^\infty+p\int_0^\infty e^{-pt}\,T(x,t)\,dt\right\}=0$$

En remarquant que les deux intégrales représentent en fait la transformée de Laplace et en simplifiant, on obtient:

$$\frac{d^2\overline{T}}{dx^2}-\frac{p}{\alpha}\overline{T}=\frac{T_0}{\alpha} \tag{2.86}$$

avec: $T_0=T(x,0)$

La transformée de Laplace a donc permis la simplification de l'équation de la chaleur qui est une équation différentielle aux dérivées partielles en une équation différentielle aux dérivées totales. Un changement de variables adéquat permettra d'éliminer le second membre de l'équation:

$$T^*=T-T_0 \Rightarrow \overline{T}^*=\overline{T}-\frac{T_0}{p} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\overline{T}^*}{dx^2}=\frac{d^2\overline{T}}{dx^2}$$

l'équation (2.86) deviendra:

$$\frac{d^2\overline{T}^*}{dx^2}-\frac{p}{\alpha}\overline{T}^*=0 \tag{2.87}$$

dont la solution est recherchée sous la forme:

$$\overline{T}^*(x,p) = A e^{-kx} + B e^{kx} \qquad (2.88)$$

avec: $k^2 = \dfrac{p}{\alpha}$

A partir de la solution transformée $\overline{T}^*(x,p)$, la solution originale $T^*(x,t) = T(x,t) - T_0$ peut être obtenue grâce à la transformée inverse (des tables donnant cette transformée sont disponibles).

<u>Exemple 2.8:</u>

Une sphère en acier de 10cm de diamètre et initialement à la température uniforme de 300°C est soudain plongée dans un milieu où règnent une température de 100°C avec un coefficient de convection de $10W/m^{2\circ}C$. Il est demandé de déterminer le temps nécessaire à la sphère d'atteindre une température de 150°C.

<u>Caractéristiques de la sphère:</u>

$$\rho = 7850kg/m^3,\ c = 0{,}46kJ/kg^\circ C,\ k = 46W/mK$$

<u>Solution:</u>

En assumant que la température de la sphère reste uniforme durant le processus de refroidissement et en négligeant les pertes de chaleur par conduction, celles échangées par convection seront manifestement représentées par une diminution de l'énergie interne de la sphère considérée. On peut donc écrire que:

$$\Phi = hS\left(T - T_\infty\right) = -\rho c \mathrm{V}\frac{dT}{dt}$$

En assumant qu'au temps t=0, la température $T = T_0$, il vient:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\frac{hS}{\rho c \mathrm{V}}t}$$

avec: $T = 150^\circ C,\ T_\infty = 100^\circ C,\ T_0 = 300^\circ C$

Donc: $\dfrac{hS}{\rho\ c\mathrm{V}} = \dfrac{10.4.\pi.(0{,}005)^2}{7850.460.(4/3).\pi.(0{,}005)^3} = 1{,}661.10^{-4} s^{-1}$

d'où: $\dfrac{150-100}{300-100} = e^{-1{,}661.10^{-4}.t}$

Finalement: $\underline{t = 8346s = 2{,}32 \text{ Heures}}$

2.11 Méthodes numériques de résolution de l'équation de la chaleur

2.11.1 Généralités

Dans beaucoup de cas pratiques, la géométrie du corps ainsi que les conditions aux limites sont trop complexes pour permettre une solution analytique du problème. On a alors recours aux méthodes numériques. Ces dernières sont des méthodes approximatives basées sur la technique appelée es différences finies.

Afin d'appliquer une méthode numérique quelconque à un problème de transfert de chaleur, certaines mesures doivent être prises, le but étant d'approximer l'équation différentielle et les conditions aux limites par un groupe d'équations algébriques. Ceci est généralement accompli en subdivisant le domaine continu étudié en une série d'éléments finis.

Dans chaque élément, on assume que la température est constante et correspond à celle de son centre. On remplace le système par un réseau de tiges joignant les centres des différents nœuds.
Si on assume que la conductivité thermique de chaque tige est la même que celle du matériau, le transfert thermique à travers le réseau de tiges joignant les différents nœuds sera une approximation acceptable du système considéré.

Si N nœuds sont choisis, on aura N équations. Le système formé par ces dernières peut être résolu en inversant la matrice de transfert ou en utilisant des méthodes numériques qui consistent essentiellement à estimer les températures aux nœuds et à les corriger jusqu'à l'aboutissement à une solution acceptable représentée par l'égalité (à une certaine précision) des flux entrant et sortant du système.

2.11.2 - Etablissement des équations aux différences finies en régime permanent

Le plan (x,y) est découpé en un réseau de mailles. Chaque élément du réseau est sous l'influence des éléments qui l'entourent (c.f. figures 2.15 et 2.16).

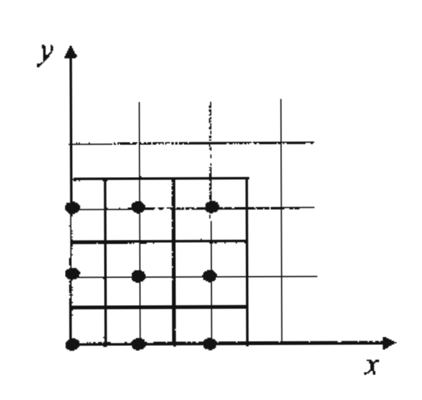


Figure 2.15: Discrétisation du domaine en éléments finis

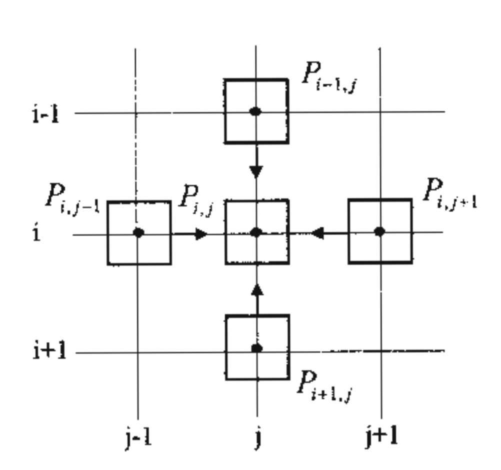


Figure 2.16: Illustration des différents nœuds ayant une influence sur le noeud central

Considérons l'élément $P_{i,j}$ appartenant au domaine et possédant une épaisseur unité.

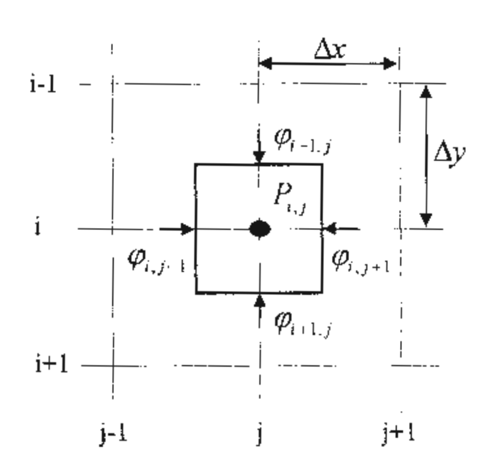


Figure 2.17: Bilan thermique du noeud central

Les équations aux différences finies pour les nœuds situés à l'intérieur du domaine sont obtenues en réalisant un bilan thermique de l'élément de volume de section $(\Delta x \Delta y)$ et d'épaisseur unité qui entoure le noeud $P_{i,j}$:

$$\left(\varphi_{i,j-1}+\varphi_{i,j+1}\right)\Delta y+\left(\varphi_{i-1,j}+\varphi_{i+1,j}\right)\Delta x+Q'\Delta x\Delta y=0 \tag{2.89}$$

La loi de Fourier permet d'exprimer les différentes densités de flux de chaleur:

- $\varphi_{i,j-1}=-\dfrac{k\Delta y\left(T_{i,j}-T_{i,j-1}\right)}{\Delta x\Delta y}=-k\dfrac{T_{i,j}-T_{i,j-1}}{\Delta x}$
- $\varphi_{i,j-1}=-\dfrac{k\Delta y\left(T_{i,j}-T_{i,j+1}\right)}{\Delta x\Delta y}=-k\dfrac{T_{i,j}-T_{i,j+1}}{\Delta x}$
- $\varphi_{i-1,j}=-\dfrac{k\Delta x\left(T_{i,j}-T_{i-1,j}\right)}{\Delta x\Delta y}=-k\dfrac{T_{i,j}-T_{i-1,j}}{\Delta y}$
- $\varphi_{i+1,j}=-\dfrac{k\Delta x\left(T_{i,j}-T_{i+1,j}\right)}{\Delta x\Delta y}=-k\dfrac{T_{i,j}-T_{i+1,j}}{\Delta y}$

Dans le cas particulier d'une maille carrée $(\Delta x=\Delta y=\Delta l)$, le remplacement des différents flux par leurs expressions respectives dans l'équation du bilan thermique et une manipulation adéquate permettent d'obtenir l'équation générale aux nœuds internes qui s'exprime:

$$T_{i,j-1}+T_{i,j+1}+T_{i-1,j}+T_{i+1,j}-4T_{i,j}+Q'\frac{(\Delta l)^2}{k}=0 \tag{2.90}$$

Remarque importante:

De la même manière, on peut obtenir des équations générales aux nœuds externes ou coins (i.e. situés aux coins du domaine considéré). Celles-ci s'expriment:

Pour un nœud externe:

$$\left(\frac{h.\Delta L}{k}+2\right)T_{ij}-\left(\frac{h.\Delta L}{k}\right)T_{\infty}-\frac{1}{2}\left(2T_{i-1,j}+T_{i,j+1}+T_{i,j-1}\right)=0 \qquad (2.91)$$

Pour un Nœud coin:

$$2\left(\frac{h.\Delta L}{k}+1\right)T_{ij}-2\left(\frac{h.\Delta L}{k}\right)T_{\infty}-\left(2T_{i-1,j}+T_{i,j-1}\right)=0 \qquad (2.92)$$

2.11.3 Conditions aux limites

Trois conditions aux limites peuvent être envisagées.

2.11.3.1 Température imposée

Cette condition n'introduit pas d'équations supplémentaires. Il suffit dans ce cas de reporter les valeurs des températures imposées aux nœuds correspondants appartenant à la frontière dans le système d'équations relatives aux nœuds internes.

2.11.3.2 Densité de flux imposée

Cette conditions introduit une équation supplémentaire.

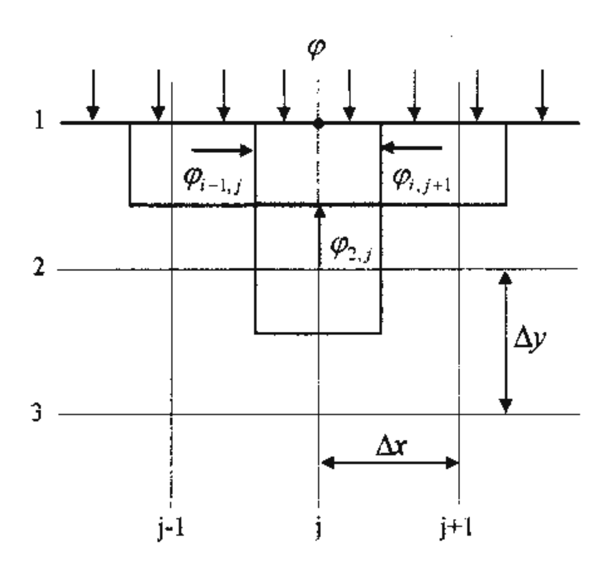


Figure 2.18: Illustration de la condition limite de la densité de flux imposée

Pour l'élément de surface frontière considéré et si φ représente la densité de flux imposée à la frontière, le bilan thermique s'écrira:

$$\left(\varphi_{i,j-1}+\varphi_{i,j+1}\right)\frac{\Delta y}{2}+\left(\varphi+\varphi_{2,j}\right)\Delta x+Q'\frac{\Delta x\Delta y}{2}=0 \qquad (2.93)$$

En appliquant la loi de Fourier et en arrangeant, on obtient:

$$T_{i,j+1}+T_{i,j-1}+2T_{2,j}-4T_{i,j}+2\varphi\frac{\Delta l}{k}+Q'\frac{(\Delta l)^2}{k}=0 \qquad (2.94)$$

2.11.3.3 - Condition mixte

Dans ce cas, le flux imposé et noté φ précédemment sera lié à la température imposée qu'on notera T_0 par la loi de Newton qui s'exprime $\varphi = h\left(T_0 - T_{i,j}\right)$. En remplaçant φ par son expression de l'équation précédente et en arrangeant, on aura:

$$T_{i,j+1}+T_{i,j-1}+2T_{2,j}-\left(4+2h\frac{\Delta l}{k}\right)T_{i,j}+2h\frac{\Delta l}{k}T_0+Q'\frac{(\Delta l)^2}{k}=0 \qquad (2.95)$$

En l'absence de sources de chaleur, cette relation peut être simplifiée de la manière suivante :

$$\frac{1}{2}\left(T_{i,j+1}+T_{i,j-1}+2T_{2,j}\right)-\left(2+\frac{h\Delta l}{k}\right)T_{i,j}+\frac{h\Delta l}{k}T_0=0$$

d'où :

$$T_{i,j}=\frac{T_{2,j}+\frac{1}{2}\left(T_{i,j+1}+T_{i,j-1}\right)+Bi\ T_0}{Bi+2} \qquad (2.96)$$

avec:

$Bi = \dfrac{h\Delta l}{k}$ est le nombre de Biot.

2.11.4 - Méthode de résolution- Etude d'un cas pratique

2.11.4.1 - Généralités

La discussion précédente nous a montré qu'une méthode numérique de résolution n'est en fait qu'un procédé permettant une approximation de la distribution de la température qui est en réalité continue par sa discrétisation en un certain nombre de points appelés nœuds. Il va de soi que plus le nombre de nœuds est important, plus on approche la solution exacte. Néanmoins, ceci implique aussi plus d'équations à résoudre et par conséquent plus de complexité dans la solution du système.

Dans la pratique, le choix d'un grand nombre de nœuds peut ne pas être nécessaire et l'utilisation d'un maillage peu dense pourrait aboutir à la même précision dans les résultats que celle d'un maillage contenant un grand nombre de nœuds. Ainsi, il est vivement conseillé de ne pas fortement discrétiser dès le début de la recherche de la solution mais plutôt de choisir progressivement des valeurs pour Δl de plus en plus petites et d'observer le comportement de la solution. Si le problème est correctement formulé, les températures aux nœuds devraient converger vers la valeur exacte avec la diminution de Δl. Notons que les erreurs quand le nombre de nœuds augmente sont cumulatives.

Afin d'introduire les méthodes de résolution les plus représentatives, intéressons-nous au cas d'un réseau dont les températures aux nœuds frontières sont assumées connues (figure 2.19). Il est demandé de déterminer les températures correspondantes aux nœuds internes.

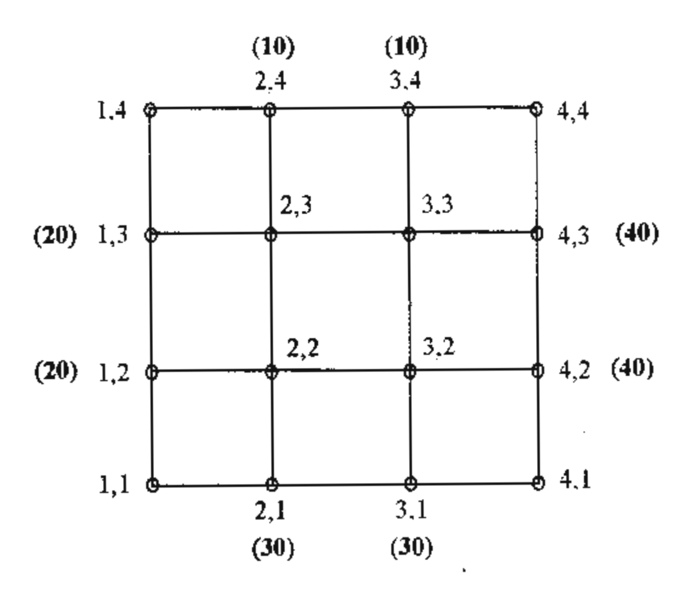


Figure 2.19: Illustration d'un domaine discrétisé dont les températures aux nœuds frontières sont connues

En appliquant l'équation aux nœuds internes démontrée auparavant, on obtient:

<u>Noeud (2,2):</u> $T_{21} + T_{23} + T_{12} + T_{32} - 4T_{22} = 0$

<u>Noeud (3,2):</u> $T_{31} + T_{33} + T_{22} + T_{42} - 4T_{32} = 0$

<u>Noeud (2,2):</u> $T_{22} + T_{24} + T_{13} + T_{33} - 4T_{23} = 0$

<u>Noeud (2,2):</u> $T_{32} + T_{34} + T_{23} + T_{43} - 4T_{33} = 0$

On aura le système:

$$\begin{cases} -4T_{22} + T_{23} + T_{32} = -(T_{21} + T_{12}) \\ T_{22} - 4T_{32} + T_{33} = -(T_{31} + T_{42}) \\ T_{22} - 4T_{23} + T_{33} = -(T_{24} + T_{13}) \\ T_{23} + T_{32} - 4T_{33} = -(T_{34} + T_{43}) \end{cases}$$

2.11.4.2 - Méthode matricielle de résolution

Le système précédent exprimé sous forme matricielle donne:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{22} \\ T_{23} \\ T_{32} \\ T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 \\ -70 \\ -30 \\ -50 \end{pmatrix}$$

qui peut s'écrire:

$$[A]\,[T] = [B]$$

dont la solution est:

$$[T] = [A]^{-1}\,[B]$$

La difficulté essentielle pour cette méthode réside dans l'inversion de la matrice $[A]$. En effet, l'importance du nombre de nœuds rend complexe la solution qui demanderait alors des temps et des moyens de calcul importants. Dans ce cas, cette méthode n'est plus pratique.

2.11.4.3 - Méthode des résidus

Une méthode permettant un calcul à la main quand le nombre de nœuds est assez réduit est celle des résidus. c'est une méthode itérative qui consiste à approcher la solution (à la précision demandée) en procédant de la manière suivante:

<u>1ère étape :</u> Se fixer des valeurs pour les températures inconnues $T_{ij}^{(1)}$.

<u>2ème étape :</u> Introduire ces valeurs dans le système d'équations et calculer le résidu de chacune d'elles $R_i^{(1)}$.

<u>3ème étape :</u> Chercher à éliminer les différents résidus en commençant par l'équation qui possède la plus grande valeur de ce dernier en valeur absolue et en remplaçant la valeur de la température inconnue qui lui correspond par:

$$T_{ij}^{(2)} = T_{ij}^{(1)} + \Delta T \text{ avec: } \Delta T = -\frac{R_i^{(1)}}{\text{coefficient de } T_{ij}^{(1)}},$$

<u>Conclusion :</u> Poursuivre le calcul jusqu'à ce que tous les résidus deviennent suffisamment petits pour n'entraîner que des modifications négligeables des températures.

<u>Exemple 2.9:</u>

Reprendre le réseau de nœuds représenté en figure 2.19 et procéder à sa résolution par application de la méthode des résidus. Une précision de $0{,}2^\circ$ *est requise.*

Solution:

En appliquant l'équation générale aux différences finies aux nœuds internes, on obtiendra le système suivant:

$$\begin{cases} 4T_{22} - T_{23} - T_{32} - T_{21} - T_{12} = 0 \\ 4T_{32} - T_{22} - T_{33} - T_{31} - T_{42} = 0 \\ 4T_{23} - T_{22} - T_{33} - T_{24} - T_{13} = 0 \\ 4T_{33} - T_{23} - T_{32} - T_{34} - T_{43} = 0 \end{cases}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T_{12} = T_{13} = 20 \\ T_{24} = T_{34} = 10 \\ T_{43} = T_{42} = 40 \\ T_{21} = T_{31} = 30 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} T_{11} = 25 \\ T_{14} = 15 \\ T_{44} = 25 \\ T_{41} = 35 \end{cases}$$

La résolution de ce système commence par le choix de valeurs pour les températures inconnues. Soit:

$$T_{22}^{(1)} = 25 \;;\; T_{32}^{(1)} = 35 \;;\; T_{23}^{(1)} = 15 \;;\; T_{33}^{(1)} = 25$$

Remplaçons les températures dans le système d'équations précédent par leurs valeurs respectives. On obtient:

$$R_1^{(1)} = 0 \;;\; R_2^{(1)} = 0 \;;\; R_3^{(1)} = -20 \;;\; R_4^{(1)} = 0$$

Corrigeons la température qui correspond à l'équation qui a eu le résidu le plus important:

$$\Delta T^{(1)} = -\frac{R_2^{(1)}}{4} = -\frac{20}{4} = -5 \Rightarrow T_{32}^{(2)} = T_{32}^{(1)} + \Delta T^{(1)} = 35 - 5 = 30$$

Les nouvelles valeurs des températures seront:

$$T_{22}^{(2)} = 25 \;;\; T_{32}^{(2)} = 30 \;;\; T_{23}^{(2)} = 15 \;;\; T_{33}^{(2)} = 25$$

Calculons les résidus: $R_1^{(2)} = 5$; $R_2^{(2)} = 0$; $R_3^{(2)} = -20$; $R_4^{(2)} = 5$

Corrigeons T_{23} :

$$\Delta T^{(2)} = -\frac{R_3^{(2)}}{4} = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow T_{23}^{(3)} = T_{23}^{(2)} + \Delta T^{(2)} = 15 + 5 = 20$$

Donc: $T_{22}^{(3)} = 25$; $T_{32}^{(3)} = 30$; $T_{23}^{(3)} = 20$; $T_{33}^{(3)} = 25$

Calculons encore les résidus :

$$R_1^{(3)} = 0 \;;\; R_2^{(3)} = 0 \;;\; R_3^{(3)} = 0 \;;\; R_4^{(3)} = 0$$

Les R_{ij} calculés à partir de cette itération seront nuls. La précision de 0,2° demandée est atteinte (dans ce cas particulier, les valeurs des températures atteintes sont des valeurs exactes) et le résultat final est:

$$T_{22} = 25 \ ; \ T_{32} = 30 \ ; \ T_{23} = 20 \ ; \ T_{33} = 25$$

2.11.4.4- Méthode itérative de Gauss-Seidel- Utilisation du principe de résistance thermique

Lorsque le nombre de nœuds est important, l'utilisation d'une méthode numérique itérative devient nécessaire. L'une de ces méthodes est celle de Gauss-Seidel qui peut être appliquée par l'utilisation du principe de résistances thermiques étudié à la section 2.7. En notant notre noeud 'i' et ceux l'entourant 'j' (c.f. figure 2.20) et en effectuant un bilan thermique, il vient:

$$q_i + \sum_i \frac{T_j - T_i}{R_{ij}} = 0$$

où:

- q_i: Chaleur délivrée au noeud 'i' par une source, unrayonnement etc.,
- R_{ij} : Résistance thermique dépendant du mode de transfert entre les nœuds 'i' et 'j' (conduction, convection aux frontières etc.).

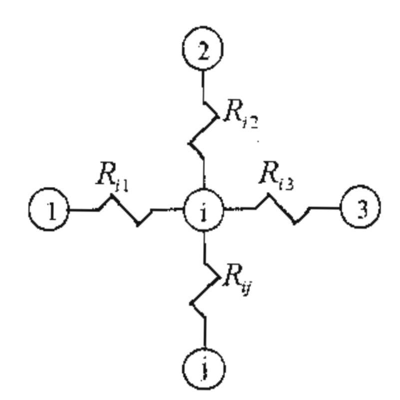


Figure 2.20: Réseau de nœuds 'j' entourant un noeud interne 'i'

Remarque:

En remplaçant le second membre de cette équation par un résidu, celle-ci peut être résolue par l'utilisation de la méthode de relaxation.

La température au noeud interne 'i' s'exprime:

$$T_i = \frac{q_i + \sum_j \frac{T_j}{R_{ij}}}{\sum_j \frac{1}{R_{ij}}} \tag{2.97}$$

Cette équation est utilisée dans l'algorithme de Gauss-Seidel qui est appliqué selon le principe suivant:

1ère Etape: Se fixer des valeurs initiales pour les températures T_i,

2ème étape: Les nouvelles valeurs des températures T_i sont calculées par application de l'équation (2.95) en utilisant toujours les dernières valeurs des T_j,

3ème étape: Le calcul se poursuit jusqu'à ce que la différence entre les valeurs des températures aux étapes (n) et $(n-1)$ soit négligeable c'est-à-dire que $\left|T_i^{(n)} - T_i^{(n+1)}\right| \leq \varepsilon$, ε étant un nombre assez petit.

Exemple 2.10:

Reprenons le même exemple traité précédemment grâce aux méthodes matricielle et de relaxation. En notant les nœuds internes 1,2,3 et 4, celui-ci se présentera selon la figure 2.21.

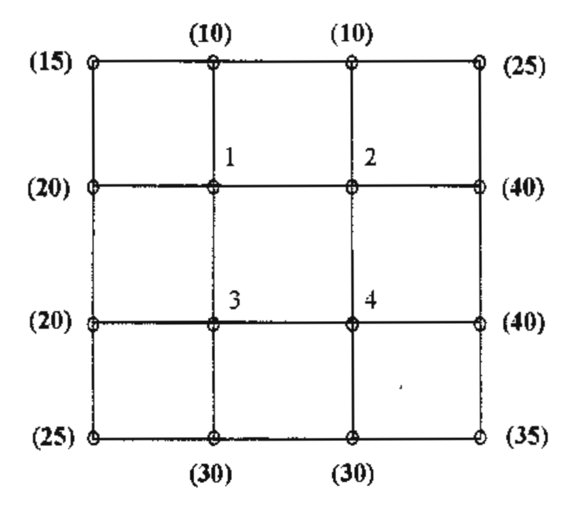


Figure 2.21: Illustration du réseau de nœuds pour application de Gauss-Seidel

Solution:

Dans ce cas, le transfert thermique entre les nœuds se fait par conduction et aucune source de chaleur n'existe. En plus, le matériau est assumé isotrope (k= Cste). Ceci entraîne:

$$\begin{cases} R = \dfrac{\Delta y}{k\,\Delta y} = \dfrac{\Delta x}{k\,\Delta x} = \dfrac{\Delta l}{k\,\Delta l} = \dfrac{1}{k} \\ q_i = 0 \end{cases}$$

d'où: $$T_i = \frac{\sum_j k_j T_j}{\sum_j k_j} = \frac{1}{4}\sum_j T_j$$

Appliquons l'algorithme de Gauss-Seidel en choisissant:

- $\underline{n=0}$ $\quad T_1 = 15\ ,\ T_2 = 25\ ,\ T_3 = 25\ ,\ T_4 = 35$

- $\underline{n=1}$

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{4}(20+10+T_2+T_3) = \frac{1}{4}(20+10+25+25) = 20 \\ T_2 = \frac{1}{4}(10+40+T_1+T_4) = \frac{1}{4}(10+40+20+35) = 26{,}25 \\ T_3 = \frac{1}{4}(20+30+T_1+T_4) = \frac{1}{4}(20+30+20+35) = 26{,}25 \\ T_4 = \frac{1}{4}(40+30+T_2+T_3) = \frac{1}{4}(40+30+26{,}25+26{,}25) = 30{,}625 \end{cases}$$

- $\underline{n=2}$

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{4}(20+10+26{,}25+26{,}25) = 20{,}625 \\ T_2 = \frac{1}{4}(10+40+20{,}625+30{,}625) = 25{,}312 \\ T_3 = \frac{1}{4}(20+30+20{,}625+30{,}625) = 25{,}312 \\ T_4 = \frac{1}{4}(40+30+25{,}312+25{,}312) = 30{,}156 \end{cases}$$

Les calculs se poursuivent jusqu'à l'obtention du résultat à la précision souhaitée. Le tableau ci-dessous donne les résultats des quatre premières itérations avec une précision inférieure à 0,12°.

Itération	T_1	T_2	T_3	T_4	ε_{max}
0	15	25	25	35	-
1	20	26,25	26,25	30,625	5
2	20,625	25,312	25,312	30,156	0,938
3	20,156	25,078	25,078	30,039	0,469
4	20,039	25,019	25,019	30,009	0,117

2.12- Régime variable

2.12.1- Généralités

En régime variable $(\partial / \partial t = 0)$, unidimensionnel $(\partial / \partial y = \partial / \partial z = 0)$ et sans sources internes, l'équation de la chaleur s'écrit:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

ou:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

avec:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$: Coefficient de diffusivité thermique.

Le calcul de la température peut être conduit de deux façons:

1- En exprimant la température T au temps $(t + \Delta t)$ en fonction des températures connues c'est-à-dire celles au temps t : Cette méthode est dite **explicite.**

2- En exprimant la température T au temps $(t + \Delta t)$ en fonction des températures inconnues au même temps $(t + \Delta t)$: c'est la méthode **implicite.**

2.12.2- Méthode explicite

Exprimons l'équation de la chaleur en régime variable en termes de différences finies. Pour cela, utilisons le développement en série de Taylor :

$$T_{i+1}^{t} = T_i^t + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)\frac{(\Delta x)^2}{2}$$

+

$$T_{i-1}^{t} = T_i^t - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)\frac{(\Delta x)^2}{2}$$

$$T_{i+1}^{t} + T_{i-1}^{t} = 2\,T_i^t + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)(\Delta x)^2$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^{t} + T_{i-1}^{t} - 2\,T_i^t}{(\Delta x)^2} \tag{2.98}$$

En remplaçant la différentielle de T par son expression dans l'équation de la chaleur, celle-ci devient:

$$\frac{T_{i+1}^{t} + T_{i-1}^{t} - 2\,T_i^t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{T_i^{t+\Delta t} - T_i^t}{\Delta t} \tag{2.99}$$

En posant: $$M = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha\,\Delta t}$$

et en arrangeant, on obtient:

$$T_i^{t+\Delta t} = \frac{1}{M}\left(T_{i+1}^{t} - T_{i-1}^{t}\right) + \left(1 - \frac{2}{M}\right)T_i^t \tag{2.100}$$

Remarque:

L'avantage de cette technique est que chaque équation considérée ne peut contenir qu'une seule inconnue. Par contre, n'importe quelle valeur de M ne saurait convenir. On montre que la condition de stabilité pour un noeud interne impose: $M > 2$ fois le nombre de variables géométriques.

Le même problème de stabilité se pose pour les nœuds situés sur la frontière. On montre aussi que la condition de stabilité dans ces cas impose: $M \geq 2\left(\frac{h\,\Delta x}{k}+1\right)$.

2.12.3- Méthode implicite

Pour cette méthode, l'équation est développée en termes en termes d'inconnues de T au temps $(t+\Delta t)$. Reprenant l'expression précédente, l'équation de la chaleur s'écrit:

$$\frac{T_{i+1}^{t+\Delta t}+T_{i-1}^{t-\Delta t}-2T_i^{t+\Delta t}}{(\Delta x)^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{T_i^{t+\Delta t}+T_i^t}{\Delta t} \tag{2.101}$$

En développant l'équation et en arrangeant, on obtient:

$$(M+2)\,T_i^{t+\Delta t}-T_{i+1}^{t+\Delta t}-T_{i-1}^{t+\Delta t}=M\,T_i^t \tag{2.102}$$

2.12.4 - Méthode générale

D'une façon générale, l'équation de la chaleur en régime variable peut être exprimée comme une combinaison de deux termes: l'un calculé à partir des expressions au temps t, et l'autre à partir des expressions au temps $(t+\Delta t)$. Pour un noeud interne, elle s'écrit:

$$\frac{1}{(\Delta x)^2}\left[\alpha\left(T_{i+1}^t+T_{i-1}^t-2\,T_i^t\right)+(1-\alpha)\left(T_{i+1}^{t+\Delta t}+T_{i-1}^{t+\Delta t}-2\,T_i^{t+\Delta t}\right)\right]=\frac{1}{\alpha\,\Delta t}\left(T_i^{t+\Delta t}-T_i^t\right) \tag{2.103}$$

Si:

- $\alpha=0$ On aura la forme de l'approche implicite,
- $\alpha=1$ On aura la forme de l'approche explicite,
- $\alpha=0{,}5$ On aura la forme dite de 'Crank-Nicholson'.

Exercices

2.1 :

Décrire brièvement le mécanisme responsable de la conduction de la chaleur dans un milieu solide.

2.2 :

Comment définissez-vous la conductibilité thermique (ou coefficient de conduction) d'une substance ?

2.3 :

Comment définissez-vous la résistance thermique ? Quelle est la relation qui la lie à la résistance électrique ?

2.4 :

Quelle est l'importance de l'utilisation de l'analogie existant entre les grandeurs thermiques et électriques ?

2.5 :

Expliquez brièvement les hypothèses entreprises afin d'arriver à la loi de Newton donnant l'expression du flux convectif des surfaces.

2.6 :

Décrire brièvement le mécanisme responsable du transfert de chaleur par convection et déduire ses principales différences avec celui réalisé par conduction ?

2.7 :

Enumèrez les ètapes essentielles de la mise en place d'une méthode numérique de résolution de l'équation de la chaleur.

2.8 :

En quoi rayonnement thermique diffère-t-il des autres types de rayonnement faisant partie du spectre du rayonnement électromagnétique ?

2.9 :

Qu'est ce que l'émissivité d'une substance ?

2.10 :

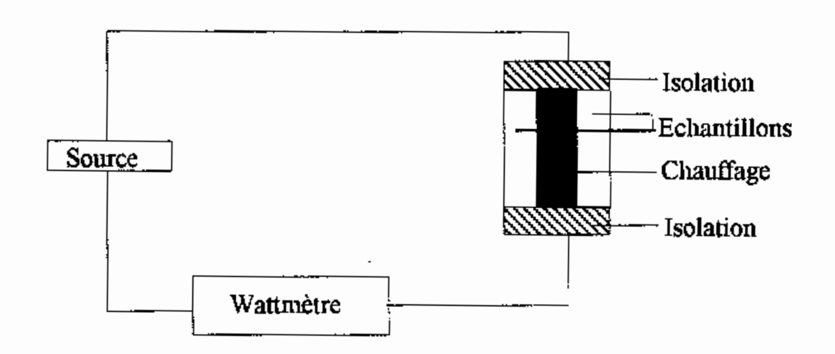
Quelle est la différence entre un corps noir, un corps gris et un corps réel ?

2.11 :

Les deux faces d'une plaque de cuivre de 3 cm d'épaisseur sont maintenues aux températures de 400°C et 100°C. Calculez la quantité de chaleur transmise par unité de surface à travers la plaque ($k_{cuivre} = 370 W/m°C$).

Rép.: $Q/S = 3{,}7 MW/m^2$

2.12 :



Afin de mesurer la conductibilité thermique, deux échantillons de matériau identiques de dimensions (15x15 cm^2) et d'épaisseur 2,5 cm sont placés dans le banc d'expérimentation représenté ci-dessus. Du courant électrique est fourni au systéme de chauffage. Un wattmètre, placé dans le circuit, indique que la puissance dissipée est de 10 Watts. Les thermocouples attachés aux surfaces chaudes et froides des échantillons indiquent des valeurs pour les températures de 300K et 260K respectivement. Calculez la conductibilité thermique k du matériau.

Rép.: $k = 0{,}14W / mK$

2.13 :

De l'air à 20°C souffle sur une plaque de dimensions (50x75 cm^2) maintenue à une température de 250°C. Le coefficient d'échange par convection h est égal à $25W / m^2\ ^\circ C$. Calculez la chaleur transmise par la plaque.

Rép.: $Q = 2{,}156kW$

2.14 :

Un courant électrique passe dans un fil de 1mm de diamètre et de 10cm de longueur. Le fil est immergé dans de l'eau à la pression atmosphérique et l'intensité du courant est augmentée jusqu'à ce que l'eau arrive à ébullition. Dans ces conditions, le coefficient de transfert convectif est trouvé ègal à 5000W/m^2 °C. Quelle est la puissance électrique qui doit être fournie au fil afin de maintenir sa surface à la température de 114°C?

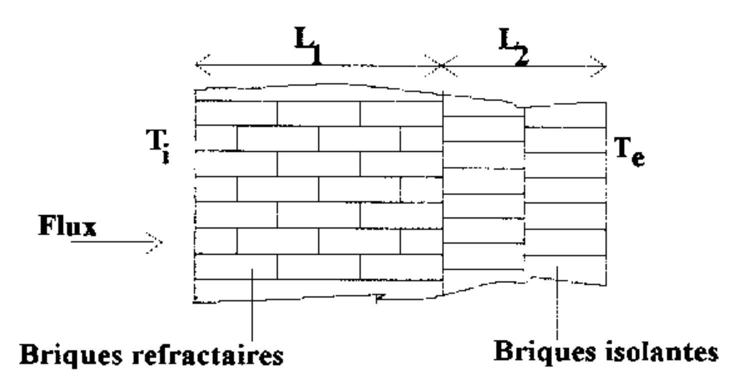
Rép.: $Q = Puissance = 21{,}98 Watts$

2.15 :

Deux plaques infiniment longues et parallèles dont les conditions de surface approchent celles du corps noir sont maintenues aux températures de 1070K et 520K. Déterminez le transfert de chaleur par rayonnement par unitè de surface entre les deux plaques.

Rép.: $Q / S = 70{,}2 kW$

2.16 :



Le mur d'un four est composé de deux couches. La première, en briques réfractaires, possède les caractéristiques $L_1 = 0{,}20m$ et $k_1 = 1{,}38W/m°C$. La seconde couche, en briques isolantes, est caractérisée par $L_2 = 0{,}10m$ et $k_2 = 0{,}17W/m°C$. A l'intérieur du four, la température T_i est de 1650°C. Le coefficient d'échange convectif sur la paroi interne est $h_i = 70W/m^{2}°C$. L'extérieur est constitué d'air dont la température et le coefficient d'échange convectif sont respectivement $T_e = 25°C$ et $h_e = 10W/m^{2}°C$. Calculez:

1- les pertes de chaleur par m^2 de surface,
2- les températures de la face intérieure, de l'interface et de la face extérieure du mur,
3- les pentes des droites T(x) pour chaque partie du mur.

Rép.: 1- $\Phi = 1917W/m^2$

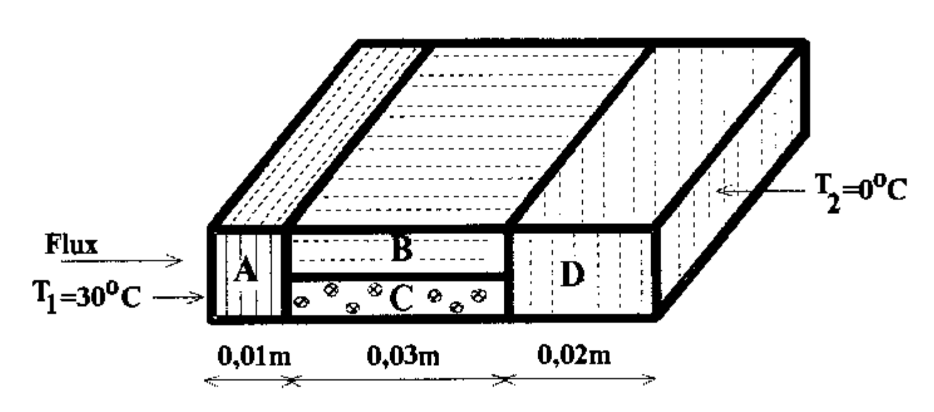
2- $T_{face\ interne} = 1622°C$; $T_{interface} = 1344°C$; $T_{face\ externe} = 216°C$

3- $\left(\frac{dT}{dx}\right)_{Réfractaires} = -1390°C/m$; $\left(\frac{dT}{dx}\right)_{isolantes} = -11280°C/m$

2.17 :

Utilisant l'analogie existant entre les grandeurs thermiques et électriques et assumant une conduction unidimensionnelle, calculez le flux de chaleur par unité de surface à travers le mur composé illustré à la page suivante.

A.N.: $k_A = 175W/mK$, $k_B = 35W/mK$, $k_C = 80W/mK$ $k_D = 55W/mK$



Rép.: $\Phi|_{unité\ de\ surface} = 44\,kW$

2.18 :

Soit un fil de 1mm de diamètre couvert d'une couche isolante de 2mm d'épaisseur et de coefficient de conduction $k = 0,5W/mK$. La température ambiante de l'air entourant le fil est de 25°C et son coefficient de convection $h = W/m^2K$. La température de la surface du fil est de 100°C. On demande de calculer le flux de chaleur dégagé par le fil par unité de longueur:

1- sans couche isolante,

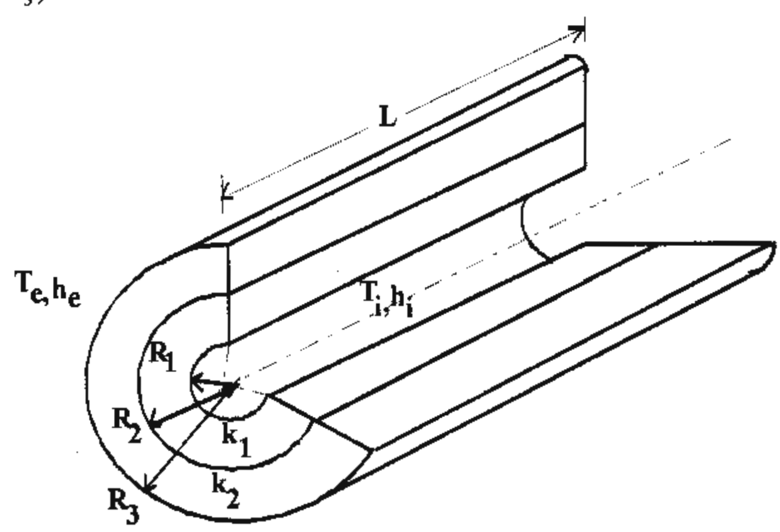
2- en présence de la couche isolante.

Rép. : 1- Transfert par convection uniquement: $\Phi = 2,36\ W/m$

2- Transfert par conduction et convection: $\Phi = 10,9\ W/m$

2.19 :

Une conduite cylindrique isolée est représentée ci-dessus. A l'intérieur de la conduite s'écoule un fluide chaud (T_i, h_i). L'isolation est représentée par un cylindre creux de rayons R_2 et R_3. On assumera un régime permanent et une conduite longue $(L \succ\succ R_1, R_2\ et\ R_3)$.



On demande de déterminer:

1- Le coefficient d'échange global par unité de longueur de la conduite,

2- le flux de chaleur transmis de l'intérieur vers l'extérieur par unité de longueur de la conduite.

Application numérique:

$$R_1 = 60mm, R_2 = 65mm, R_3 = 80mm, k_1 = 46W/mK, k_2 = 0,16W/mK$$

$$h_i = 100W/m^2K, h_e = 20W/m^2K, T_i = 333K, T_e = 293K$$

Rép.: $K_{global} = 5,98W/m^2K$; 2- $\Phi = 120W/m$

2.20 :

Déterminez les déperditions thermiques Φ se tenant à travers une surface vitrée de surface $1m^2$ ainsi que la répartition des températures dans les deux cas suivants :

1- Vitrage simple d'épaisseur e = 4 mm,
2- Double vitrage composé de deux lames de verre d'épaisseur 4 mm chacune et d'une lame d'air intermédiaire stationnaire d'épaisseur 6 mm.

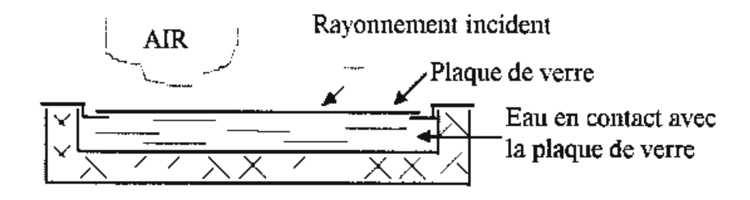
Application Numérique: $k_{verre} = 1{,}2 W/mK$; $k_{air} = 0{,}024 W/mK$
$h = 12 W/m^2K$; $T_i = 20°C$; $T_e = 0°C$

Rép.: 1- $\Phi = 117{,}6W$; Temps: $10{,}2/9{,}8°C$
2- $\Phi = 47{,}2W$; Temps: $16{,}1/15{,}9/4{,}1/3{,}9°C$

2.21 :

Un distillateur solaire (voir figure ci-dessus) dans lequel s'écoule de l'eau à la température de 360K est exposé au rayonnement solaire dont le flux thermique à travers la plaque de verre est de 490 W/m^2. La température de l'air ambiant est de 300K.

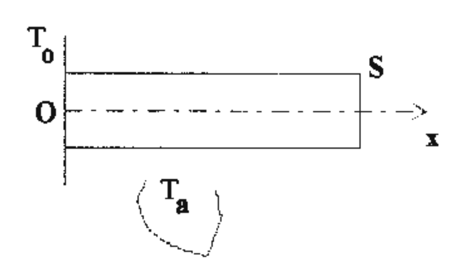
En négligeant l'effet de la plaque de verre sur le transfert thermique et en considérant que le bas et les côtés du distillateur sont adiabatiques, déterminez le temps nécessaire pour transférer 10^6 Joules à 1m^2 de surface de l'eau.



On prendra : $h_{eau-verre} = 28{,}3\ W/m^2K$; $h_{verre-air} = 6{,}8\ W/m^2K$

Rép. : $t = 1h43mn$

2.22 :

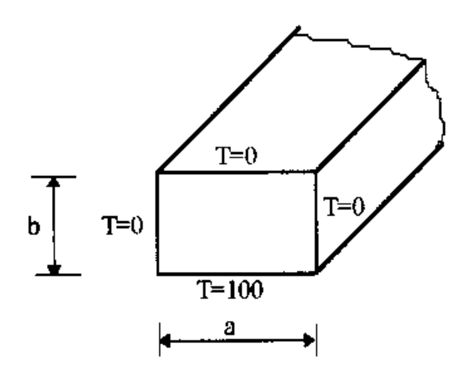


Considérons une barre cylindrique de longueur L dont une extrémité est chauffée à une température uniforme T_0. L'autre extrémité est considérée adiabatique. Soient p le périmètre de la section droite, S l'aire de cette section, k la conductibilité thermique du matériau, h le coefficient ailette-air et T_a la température ambiante. Il est demandé de trouver la distribution de température ainsi que le flux total de dissipation.

Rép.: $T(x) - T_a = \left(T_0 - T_a\right)\left[ch(mx) - \dfrac{sh(mL)\,sh(mx)}{ch(mL)}\right]$, $\Phi_{pertes} = \sqrt{khpS}\left(T_0 - T_a\right)th(mL)$

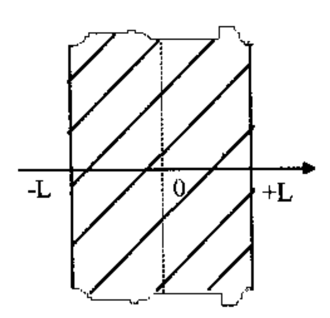
2.23 :

Trouvez la distribution de température $T(x,y)$ dans la longue barre rectangulaire dont la section est représentée ci-dessous.



Rép.: $T(x,y) = -\frac{400}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{a}\right]sh\left[\frac{(2n+1)\pi(b-y)}{a}\right]\left[\frac{1}{sh\left(\frac{(2n+1)\pi b}{a}\right)}\right]$ x

2.24 :



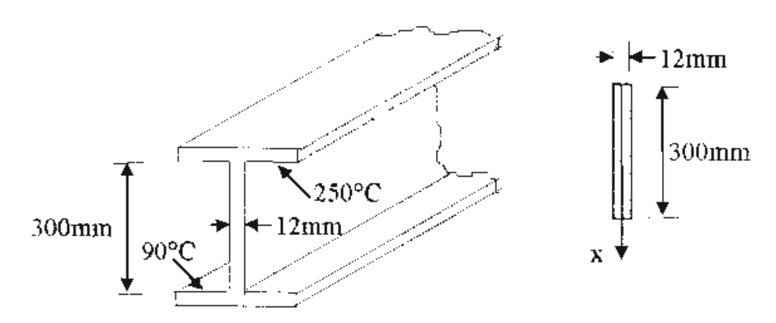
Une tôle métallique d'épaisseur 2L, de longueur infinie et de température initiale T_0 uniforme se trouve plongée brusquement dans un bain isotherme à température constante T_a. En admettant que les deux faces ($x=-L$ et $x=+L$) prennent instantanément la température du bain (i.e. au temps t: $T(L,t)=T(-L,t)=T_a$), trouvez la distribution de température $T(x,t)$.

Rép. : $T(x,t) = \frac{4T_0}{(2n+1)\pi}\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}}\cos\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right]$

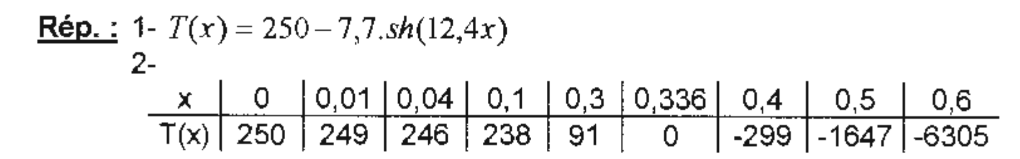
2.25 :

Un profilé en I de hauteur 300mm dont le dessus est maintenu à une température de 250°C et le dessous à 90°C possède une épaisseur e=12mm. . De l'air à 250°C souffle

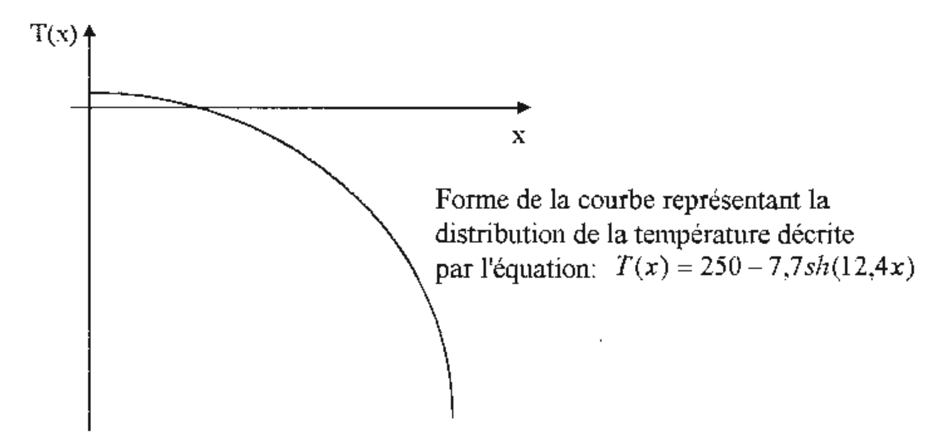
le long de ce profilé entraînant une valeur pour le coefficient de transfert h=40W/m² K. . La conductivité thermique de l'acier est k=45W/mK.
1- Trouvez la distribution de la température le long de la tranche centrale du profilé,
2- Dessinez la courbe qui représente cette distribution.



Rép. : 1- $T(x) = 250 - 7{,}7.sh(12{,}4x)$
2-



x	0	0,01	0,04	0,1	0,3	0,336	0,4	0,5	0,6
T(x)	250	249	246	238	91	0	-299	-1647	-6305



2.26 :

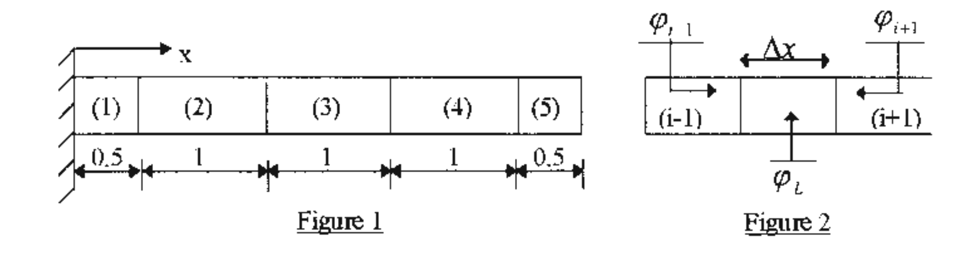


Figure 1 Figure 2

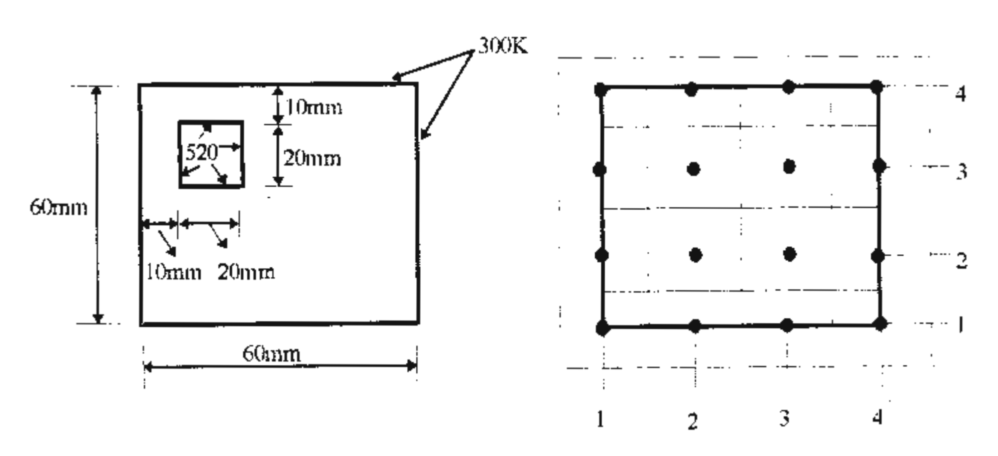
Une aube de turbine de longueur 4cm et de diamètre 1cm est constituée d'acier (k=25W/mK). la température de sa base $T_1 = 750K$. *L'aube est exposée à de l'air chaud* ($T_a = T_5 = 1140K$, $h = 450W/m^2K$). *Il est demandé :*
1- d'établir l'équation générale aux nœuds internes (notés 2, 3 et 4),
2- d'écrire les trois équations aux nœuds internes 2, 3 et 4,
3- de d terminer le flux de chaleur (dissipé ou gagné) par l'aube.

Rép.: 1- $AT_i + BT_{i-1} - BT_{i+1} + C = 0$ avec: $A = -hpD\Delta x$, $B = \dfrac{kpD^2}{4Dx}$, $C = hpD\Delta x$

2- $Noeud2$: $AT_2 + BT_1 - BT_3 + C = 0$, $Noeud3$: $AT_3 + BT_2 - BT_4 + C = 0$
$Noeud4$: $AT_4 + BT_3 - BT_5 + C = 0$

3- $\Phi = 65{,}45W$

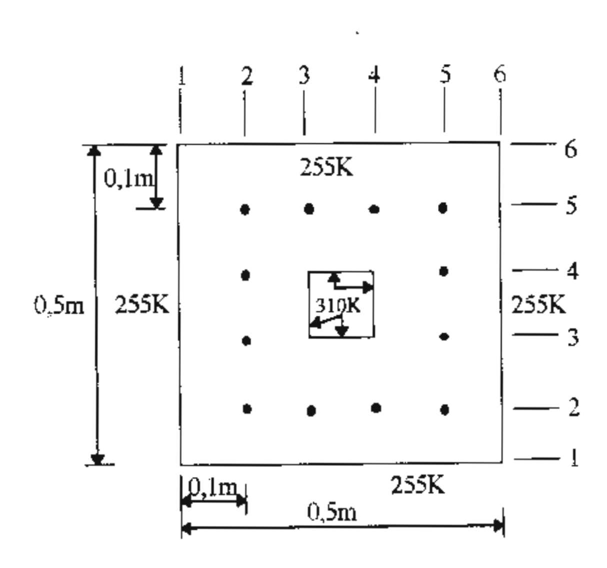
2.27 :



Une cheminée (k=0,7W/mK) possède une section droite telle que définie par la figure. Si la température de la face interne est de 520K et celle de la face externe 300K, calculez en utilisant une méthode numérique la distribution de température (Précision de 1K).

Rép.: $T_{22} = 362{,}5K$; $T_{32} = 331{,}25K$; $T_{33} = 362{,}5K$

2.28 :

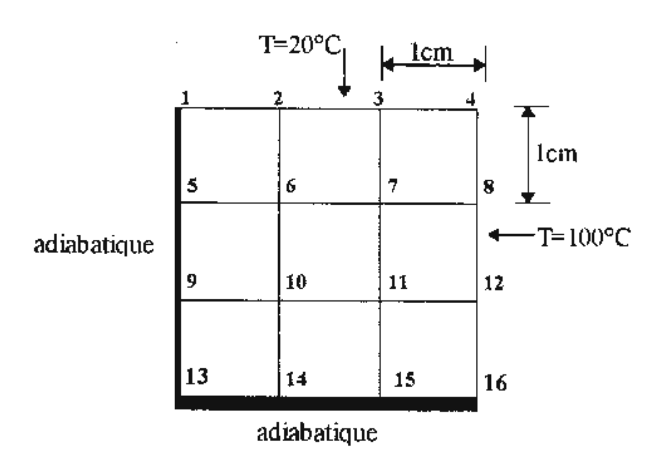


Calculez grâce à une méthode numérique:
1- les températures aux 12 points équidistants illustrés sur la figure,
2- le flux de chaleur par mètre d'épaisseur.

Données: $k = 1{,}7W/mK$; *Faire usage de la symétrie.*

Rép.: 1- $T_{25} = 266K$ et $T_{35} = T_{45} = 277K$; 2- $Q = 1{,}05kW/m$

2.29 :



Le solide bi-dimensionnel illustré ci-dessus ($k = 20W/m°C$) possède une source interne générant une quantité de chaleur de $90MW/m^3$. Il est demandé d'exprimer les équations aux nœuds internes et externes ainsi que celui situé au coin (On assumera $T_4 = 20°C$).

Rép.: $T_{10} + T_5 + T_7 - 4T_6 = -470$; $T_4 + T_6 - 4T_7 = -570$

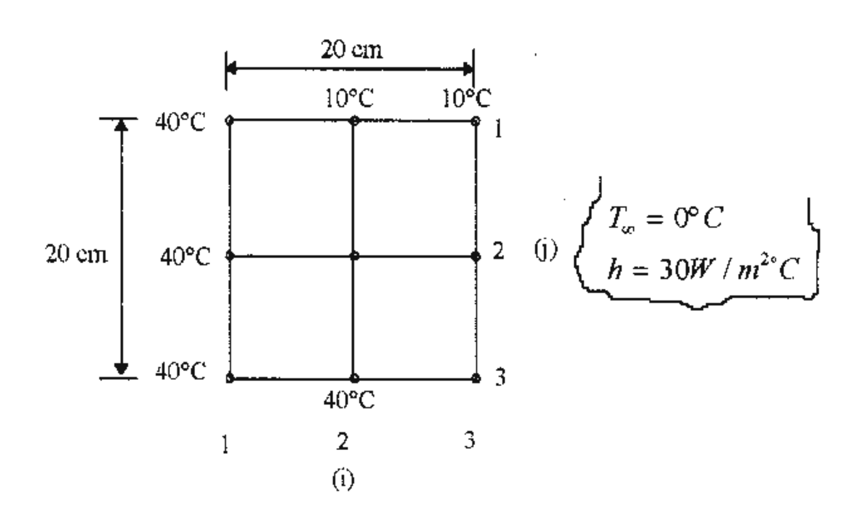
$T_{14} + T_6 + T_9 + T_{11} - 4T_{10} = -450$; $T_{15} + T_7 + T_{10} - 4T_{11} = -550$

$2T_5 - T_6 - 0{,}5T_9 = -440$; $2T_9 - T_{10} - 0{,}5T_5 - 0{,}5T_{13} = -450$

$2T_{14} - T_{10} - 0{,}5T_{13} - 0{,}5T_{15} = -450$; $2T_{15} - T_{11} - 0{,}5T_{14} = -400$

$2T_{13} - 2T_{14} - T_9 = -450$

2.30:



Soit le réseau de nœuds illustré ci-dessus appartenant à un solide de conductibilité thermique $k = 10W/m°C$. Sa paroi de droite est soumise à un flux de convection.

Il est demandé de calculer les températures aux nœuds (2,2), (3,2) et (3,3).

Rép. : Noeud interne (2,2): $T_{21} + T_{32} + T_{23} + T_{12} - 4T_{22} = 0$

Noeud externe (3,2): $2{,}3T_{32} - 0{,}3T_\infty - T_{22} - 0{,}5T_{33} - 0{,}5T_{31} = 0$

Noeud coin ((3,3): $2{,}6T_{33}0{,}6T_\infty - 2T_{23} - T_{32} = 0$

d'où:

$$\begin{cases} -4\,T_{22} + T_{32} = -(T_{12} + T_{21} + T_{23}) = -90 \\ 2{,}3\,T_{32} - T_{22} - 0{,}5\,T_{33} = 5 \\ 2{,}6\,T_{33} - T_{32} = 80 \end{cases}$$

La résolution de ces trois équations entraîne:

$T_{32} = 23{,}1°C$, $T_{22} = 28{,}3°C$ et $T_{33} = 39{,}6°C$

Chapitre 3 :

TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION

- Introduction
- Equations générales de l'hydrodynamique
- Concept de la couche limite, ses hypothèses et ses équations
- Données empiriques de la convection
- Méthodes d'évaluation de h
- Analyse dimensionnelle
- Formules empiriques couramment utilisées

3.1 Introduction

La convection est un mode de transfert de chaleur qui se produit le plus souvent entre un fluide en mouvement et une paroi solide. Alors que la conduction étudiée au chapitre précédent peut être considérée comme un transfert d'énergie dû à des mouvements microscopiques, le phénomène de convection est un transfert dû à des mouvements macroscopiques. On distingue deux types de convection:

- **La convection libre ou naturelle** où le mouvement du fluide est causé par un champs de forces intérieur (gravité, gradient de densité, gradient de température etc.),

- **La convection forcée** où le fluide est mis en mouvement par l'action d'un champs de forces externe (pompe, ventilateur etc.).

D'une façon simplifiée, l'objectif principal de l'étude du phénomène de la convection consiste essentiellement à:

- développer des méthodes permettant l'évaluation du paramètre h, coefficient de convection;

- étudier les différentes formules empiriques utilisées.

3.2 Equations générales de l'hydrodynamique

3.2.1 Généralités - Définitions

3.2.1.1 Milieu continu

Un milieu matériel est dit continu lorsque toutes ses propriétés varient continûment dans l'espace et dans le temps. En d'autres termes, les distances considérées sont largement supérieures aux distances intermoléculaires.

3.2.1.2 Milieu homogène

Un milieu matériel est dit homogène lorsque toutes ses propriétés sont constantes dans tout le domaine considéré (par exemple, la masse volumique dans les milieux incompressibles).

3.2.1.3 Milieu isotrope

Un milieu matériel est dit isotrope lorsque toutes ses propriétés sont identiques quel que soit l'orientation.

3.2.1.4 Fluide

Un fluide se définit comme un corps présentant une vitesse de déformation non nulle si on lui applique des contraintes tangentielles aussi faibles soient elles.

3.2.1.5 Fluide newtonien

Un fluide newtonien constitue un milieu matériel continu, homogène et isotrope.

3.2.2 Equation de conservation[(*)]

3.2.2.1 Equation de conservation de la masse ou èquation de continuité

Le principe de conservation de la masse d'un volume V nous dicte l'égalité entre la variation de masse dans ce volume et le 'flux de masse' à travers sa surface:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\iint_S \rho \vec{V} \vec{n}\, dS = -\iiint_V div\left(\rho \vec{V}\right) dV$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \vec{V}\right) = 0 \qquad (3.1)$$

Pour un écoulement stationnaire $(\partial / \partial t = 0)$ et incompressible $(\rho = Cste)$, l'équation de continuité se réduit à:

$$div \vec{V} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (3.2)$$

(*) Pour plus de détails concernant les équations fondamentales ou équations de conservation, consulter un ouvrage spécialisé. L'auteur conseille celui classique de H.W. Liepmann et A. Roshko intitulé 'Elements of Gasdynamics' et publié par John Wiley et sons.

3.2.2.2 Equations de conservation de la quantité de mouvement ou équations de Navier-Stokes

En appliquant le principe de conservation des moments rapporté au système de coordonnées cartésiennes, les équations de Navier-Stokes s'écrivent:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{Du}{Dt} = F_x - \dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ \rho \dfrac{Dv}{Dt} = F_y - \dfrac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ \rho \dfrac{Dw}{Dt} = F_z - \dfrac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{cases} \quad (3.3)$$

avec:

- $\dfrac{D}{Dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial x} + v\dfrac{\partial}{\partial y} + w\dfrac{\partial}{\partial z}$: Dérivée particulaire,
- ρ: Densité,
- F_x, F_y, F_z: Forces extérieures,
- P: Pression,
- μ: Viscosité dynamique,
- u, v, w: Composantes du vecteur vitesse.

3.2.2.3 Equation de conservation de l'énergie

En appliquant le principe de conservation de l'énergie thermique déduit du premier principe de la thermodynamique, l'équation de conservation de l'énergie exprimée relativement à un système de coordonnées cartésiennes s'exprime:

$$\rho\, C_p \frac{DT}{Dt} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

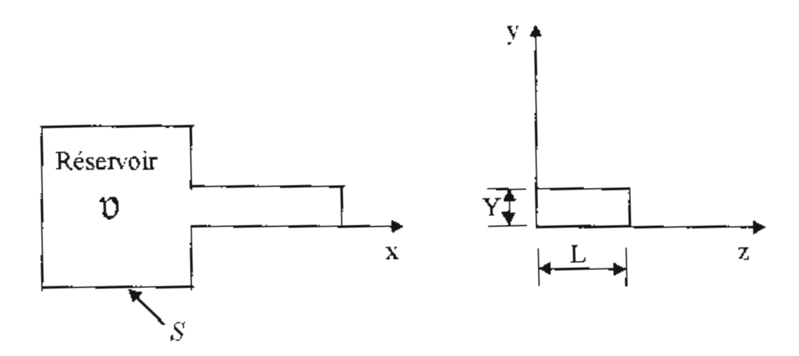
En termes de la fonction enthalpie, elle s'exprime:

$$H_1 + \frac{V_1^2}{2} + Q = H_2 + \frac{V_2^2}{2} + W$$

où:

- H: Enthalpie,
- Q: Chaleur reçue,
- W: Travail net produit.

Exemple 3.1:



De l'air s'écoule d'un réservoir à travers une conduite de section rectangulaire tel que représenté ci-dessus. Si la hauteur du tube de sortie Y est considérée petite relativement à sa longueur L, le profil de la vitesse à la section de sortie s'exprimera par:

$$u(y) = \frac{4U}{Y^2}\left(yY - y^2\right)$$

En assumant le débit assez faible afin que la densité de l'air dans le réservoir et la conduite de sortie soit considérée uniforme $\left[\rho \neq \rho(x,y,z)\right]$, déterminez (a) le débit instantané à la sortie et (b) le taux de variation de la densité dans le réservoir en fonction du temps.

Données:

$$\mathrm{V} = 0{,}283 m^3 \; ; \; Y = 0{,}00254 m \; ; \; L = 0{,}3048 m \; ; \; P_{inst.} = 1{,}379.10^5 \; N/m^2$$

$$T_{inst.} = 277{,}8 K \; ; \; U_{inst.} = 30{,}48 m/s \; ; \; R_{Gaz\ parfaits} = 287{,}04 \; J/kgK$$

Solution

a/ Le débit instantané du fluide est fonction de la vitesse et de l'aire de la section de sortie. Il s'exprime donc:

$$\dot{m}_{sortie} = \iint_{S_{sortie}} \rho u dS = \iint_{S_{sortie}} \rho \frac{4U}{Y^2}\left(yY - y^2\right) dydz = \rho \frac{4U}{Y^2} \int_0^Y \int_0^L \left(yY - y^2\right) dydz$$

Après intégration et arrangement: $\underline{\dot{m}_{sortie} = \frac{2\rho U LY}{3}}$

b/ En considérant la surface de contrôle comme étant celle enveloppant le volume V composé du réservoir et de la conduite et en utilisant l'équation de continuité, il vient:

$$\iiint_{\mathrm{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathrm{V} + \iint_{S} \rho u dS = 0 = \iiint_{\mathrm{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathrm{V} + \dot{m}_{sortie}$$

La densité ne dépendant pas de x, y et z, donc: $\frac{\partial r}{\partial t}\mathrm{V} = -\dot{m}_{sortie} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{2\rho U LY}{3\mathrm{V}}$

L'application numérique donne: $\underline{\dot{m}_{sortie} = 0{,}027 kg/s}$ et $\underline{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -0{,}096 kg/m^3 s}$

Exemple 3.2

De l'air à la température de 300°C est détendu isentropiquement jusqu'à atteindre la vitesse de 250m/s. Calculez la température de l'air à cette vitesse.

Solution

L'utilisation de l'équation de conservation de l'énergie (3.5) permet d'écrire:

$$H_1 - H_2 = C_p\left(T_1 - T_2\right) = \frac{U_2^2}{2}$$

d'où:

$$T_2 = T_1 - \frac{U_2^2}{2C_p} = 300 - \frac{(250)^2}{2 \text{ x } 1006} = \underline{269\,°C}$$

3.2.3 Le concept de la couche limite et ses hypothèses(*)

3.2.3.1 Concept de la couche limite

Une solution complète des équations de Navier-Stokes représentant un écoulement visqueux pose des difficultés mathématiques considérables. Une simplification de ces équations générales est donc nécessaire. En 1905, Ludwig Prandtl remarqua que pour la plupart des écoulements, l'influence de la viscosité n'était significative que dans une région très mince située au voisinage de la paroi solide. Le reste du fluide peut donc être considéré comme non visqueux et donc idéal. Cette région est appelée: la couche limite.

Considérons un fluide s'écoulant auprès d'une paroi solide (cf. figure ci-dessous):

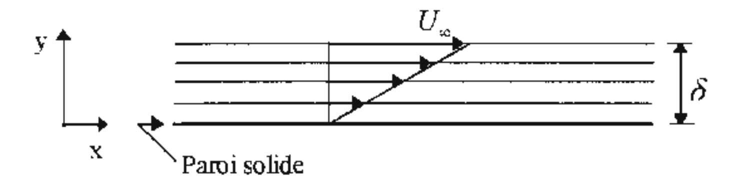


Figure 3.1: Couche limite au voisinage d'une paroi solide

Si le fluide est newtonien, la contrainte tangentielle s'exprimera grâce à la loi dérivée par Newton qui peut s'écrire dans ce cas:

$$\tau = \mu \frac{U_\infty}{\delta} \qquad (3.6)$$

où: U_∞ représente la vitesse à la frontière de la couche limite.

(*) Pour plus de détails concernant l'étude de la couche limite, consulter les ouvrages spécialisés. L'auteur conseille vivement celui classique de H. Schlichting intitulé: 'Boundary layer theory' publié par Mc-Graw Hill.

A l'intérieur de la couche limite, U_∞ est liée à la vitesse u par la relation:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_\infty}{\delta}$$

La contrainte tangentielle aura donc pour expression:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (3.7)$$

On définit aussi la viscosité cinématique comme:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad (3.8)$$

Exemple 3.3

Deux plaques horizontales sont placées à $1{,}25cm$ l'une de l'autre. L'espace compris entre elles est rempli d'une huile de viscosité dynamique $\mu = 1{,}4 Ns/m^2$. Il est demandé de calculer la contrainte tangentielle exercée par l'huile si la plaque supérieure se déplace à la vitesse de $2{,}5 m/s$.

Solution

L'application de l'équation (3.7) aboutit à:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = 1{,}4 \ \frac{2{,}5}{0{,}0125} = \underline{280\, N/m^2}$$

3.2.3.2 Hypothèses de la couche limite

En tenant compte des particularités propres à l'écoulement d'un fluide au voisinage d'une paroi solide, des hypothèses applicables uniquement à l'intérieur de la couche limite et permettant la simplification des équations du mouvement sont énoncées. Elles sont connues sous le nom d'hypothèses de la couche limite.

1- Le fluide immédiatement en contact avec la paroi est immobile: c'est la condition de non glissement qui pour un écoulement bi-dimensionnel se traduit par:

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ v(x,0) = 0 \end{cases}$$

2- L'épaisseur de la couche limite notée δ et définie comme la distance à laquelle $u = 0{,}99 U_\infty$ est considérée petite relativement aux autres dimensions caractéristiques de l'écoulement. Néanmoins, cette épaisseur augmente quand on se déplace dans le sens de l'écoulement (cas de la plaque de l'exemple 3.4).

3- A l'intérieur de la couche limite, la vitesse axiale (dans le sens de l'écoulement) notée u est très grande devant la vitesse radiale notée v c'est-à-dire que lorsque $y \prec \delta$ alors $u \succ\succ v$.

4- A l'intérieur de la couche limite, les variations de la vitesse dans le sens de l'écoulement relativement à y sont importantes. Ce qui peut se traduire par:

$$y \prec \delta \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} \succ\succ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (3.10)$$

Ces différentes hypothèses valables uniquement à l'intérieur de la couche limite simplifient sensiblement les équations du mouvement. Il en résulte en particulier que pour un couche limite bi-dimensionnelle:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx} \qquad (3.11)$$

Pour un écoulement bi-dimensionnel stationnaire et laminaire (cf. Paragraphe 3.2.4), ces équations s'écrivent:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{dx} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \qquad (3.12)$$

avec:

$$\begin{cases} u = v = 0 \;\; à \;\; y = 0 \\ u = U_e(x) = U_\infty(x) \;\; à \;\; y = \delta \end{cases}$$

L'épaisseur de la couche limite dans ce cas s'exprime en fonction du nombre adimensionnel de Reynolds (c.f. paragraphe 3.2.4):

$$\delta_{laminaire} = \frac{5x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (3.13)$$

où:

- $\delta_{laminaire}$: Epaisseur de la couche limite laminaire,
- x: Distance de l'origine (début du corps) au point considéré,
- Re_x: Nombre de Reynolds calculé sur la base de la distance x.

3.2.4 Régime laminaire et régime turbulent

En 1883, Osborne Reynolds conduisit une série d'expériences classiques impliquant des écoulements à l'intérieur des conduites. Ces expérimentations démontrèrent l'existence de deux sortes de régime distincts: un régime dit **laminaire** et un autre dit

turbulent. Reynolds réussit à déterminer le critère d'instabilité qui gouverne la transition entre ces deux régimes.

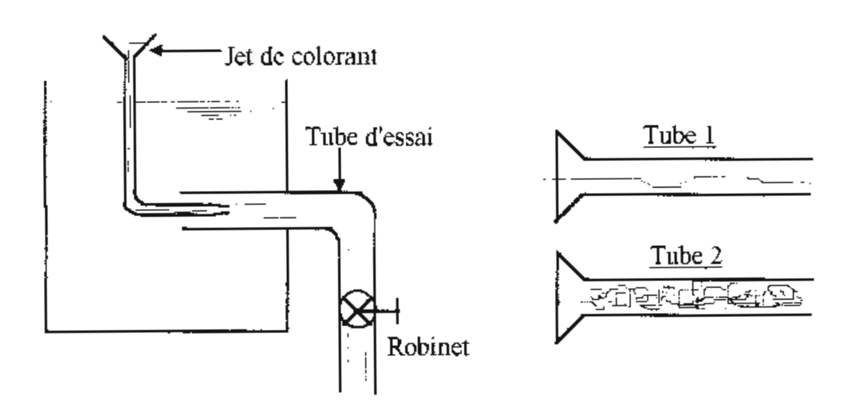


Figure 3.2: Représentation de l'expérience de Reynolds

Ceci a été réalisé grâce à l'injection d'un mince filet de colorant à l'intérieur d'un tube d'essai situé dans un réservoir rempli d'un liquide possédant la même masse volumique que le colorant (cf. figure 3.2). Quand le débit est faible, le filet coloré reste étroit et parallèle aux lignes de courant dans le tube: c'est le régime laminaire (cf. Tube 1 de la figure 3.2). Lorsque le débit est augmenté au-dessus d'une certaine valeur critique, le filet coloré commence à onduler puis très rapidement, on observe comme un éclatement de ce filet qui semble alors occuper tout le tube: c'est le régime turbulent (cf. Tube 2 de la figure 3.2). Reynolds appliqua une analyse dimensionnelle aux écoulements en conduite et conclut que la transition prend place pour une valeur fixée d'un certain paramètre pouvant être interprété comme le rapport des forces d'inertie à celles de viscosité. En son honneur, ce paramètre est depuis appelé: le nombre de Reynolds. La signification physique de celui-ci peut être démontrée comme suit:

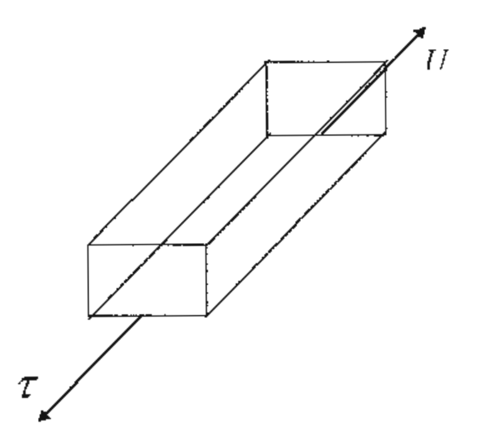


Figure 3.3: Représentation d'un élément de volume fluide

$$\text{Force typique d'inertie} = \text{Masse} \times \text{Accélération}$$

$$= \rho \ L^3 \times \frac{U^2}{L} = \rho U^2 L^2$$

$$Force\ typique\ de\ viscosit\acute{e} = Contrainte\ de\ viscosit\acute{e} \times Surface$$

$$= \mu \frac{U}{L} \times L^2 = \mu U L$$

Donc:

$$\text{Re} = \frac{Forces\ d'inertie}{Forces\ de\ viscosit\acute{e}} = \frac{\rho U^2 L^2}{\mu U L} = \frac{\rho U L}{\mu} \qquad (3.14)$$

Utilisant la viscosité cinématique notée et définie par: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, le nombre de Reynolds s'exprime:

$$\text{Re} = \frac{U L}{\nu} \qquad (3.15)$$

Il est généralement admis que la valeur du Reynolds transitoire définissant le passage de la nature laminaire de l'écoulement à celle turbulente est égale à[(*)]:

- $\text{Re}_c = 2300$ pour les écoulements en conduite,
- $\text{Re}_c = 500000$ pour les écoulements sur plaques planes.

Exemple 3.4

Une plaque plane lisse de forme carrée de $2cm$ de côté est tenue immergée dans de l'eau de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} m^2/s$ s'écoulant à la vitesse de $U = 30cm/s$. Il est demandé de déterminer la nature de l'écoulement à une distance de $50cm$ du bord de la plaque ainsi que l'épaisseur de la couche limite en ce point.

Solution

Déterminons d'abord la nature du régime d'écoulement. Pour cela, calculons la valeur du nombre de Reynolds au point considéré c'est-à-dire à $x = 50cm$:

$$\text{Re}_x = \frac{U x}{\nu} = \frac{0{,}30 \times 0{,}50}{10^{-6}} = 150000 \prec 500000$$

L'écoulement est donc laminaire et l'épaisseur en ce point s'exprime par l'équation 3.13:

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{5 \times 0{,}50}{\sqrt{150000}} = \underline{0{,}0064\,m}$$

[(*)] Ces valeurs sont approximatives. La valeur transitoire du nombre de Reynolds dépend de plusieurs facteurs dont le plus significatif est la rugosité du matériau qui favorise un passage plus rapide du régime laminaire au régime turbulent.

<u>Exemple 3.5</u>

De l'eau s'écoule dans une conduite de section circulaire de diamètre intérieur égal à $10cm$. *Il est demandé de déterminer la vitesse de l'écoulement à la transition. On prendra* $\mu_{eau} = 10^{-3} Ns/m^2$ *et* $\rho_{eau} = 1000 kg/m^3$.

<u>Solution</u>

Pour une conduite de section circulaire, le nombre de Reynolds critique a pour valeur 2300. Donc:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U D}{\mu} \Rightarrow U = \frac{\mathrm{Re}\,\mu}{\rho D}$$

d'où: $$U = \frac{2300 \times 10^{-3}}{1000 \times 0{,}1} = \underline{0{,}023 m/s}$$

3.2.5 Nombres sans dimensions

Les nombres adimensionnels souvent utilisés en présence du phénomène de convection qu'elle soit naturelle ou forcée sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Nom	Symbole	Expression	Signification des paramètres
Reynolds	Re	$\mathrm{Re} = \frac{Forces\ d'inertie}{Forces\ de\ viscosité} = \frac{UL}{\nu}$ Caractérise la nature du régime de l'écoulement (laminaire ou turbulent) en convection forcée.	U: Vitesse caractéristique. L: Longueur caractéristique.
Nüsselt	Nu	$Nu = \frac{Q\ échangée\ par\ convection}{Q\ échangée\ par\ conduction}$ $Nu = \frac{h S \Delta T}{k \frac{S}{L} \Delta T} = \frac{h L}{k}$	
Prandtl	Pr	$\mathrm{Pr} = \frac{viscosité\ cinématique}{diffusivité\ thermique}$ $\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu C_p}{k}$ Caractérise la distribution des vitesses relativement à celle des températures c'est-à-dire le milieu où se réalise le transfert.	a: Coefficient de diffusivité thermique.

Nom	Symbole	Expression	Signification des paramètres
Grashoff	Gr	$Gr = \frac{\beta g \rho^2 L^3 \Delta T}{\mu^2} = \frac{\beta g L^3 \Delta T}{\nu^2}$	β : Coefficient de dilatation volumique: $\left[\beta = \frac{1}{T(K)}\right]$ g: Accélération de la pesanteur ΔT: Différence de température caractéristique.
Rayleigh	Ra	$Ra = \Pr \, . \, Gr$ Remplace le Reynolds en convection naturelle.	

3.3 Données empiriques de la convection

3.3.1 Utilisation du nombre de Nüsselt

En étudiant la couche limite et ses hypothèses, nous avons assumé l'existence d'une couche mince près de la paroi dont la vitesse est presque nulle. En s'éloignant de la paroi, la vitesse augmente jusqu'à atteindre une valeur constante généralement notée U_∞. En appliquant ces observations qualitatives au transfert de chaleur se produisant entre une paroi solide et un fluide en mouvement, on pourra se faire une idée du profil de la température. Près de la paroi, la chaleur ne peut être transmise que par conduction; la couche au voisinage de celle-ci étant stationnaire et on s'attend à un gradient de température assez large. En s'éloignant de la paroi, le mouvement du fluide aidera au transport de l'énergie et le gradient de température sera moins important. Pour une couche limite turbulente qui s'est formée près d'une paroi chauffée, la distribution de la température aura la forme représentée en figure 3.4.

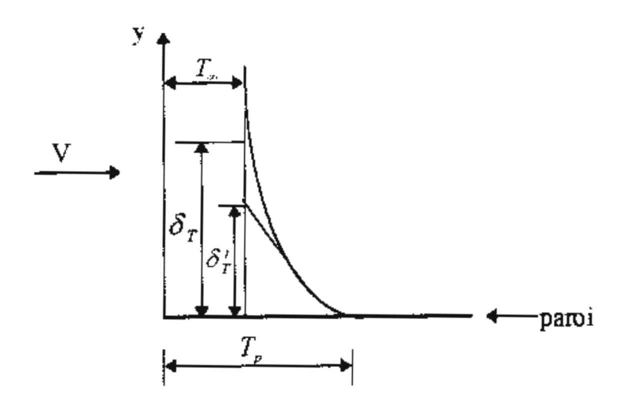


Figure 3.4: Profil de la température à l'intérieur de la couche limite se développant près d'une paroi solide

Cette discussion suggère une méthode d'évaluation de la quantité de chaleur échangée entre la paroi et le fluide. A l'interface ($y = 0$), le flux de chaleur se transmet par conduction et s'exprime donc grâce à la loi de Fourier (2.5):

$$\Phi_{surface-fluide} = -k_{fluide} S \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \tag{3.16}$$

Afin de se rapprocher du sens physique du transfert se réalisant entre le fluide et la paroi, celui-ci est décrit par la loi de Newton (2.24) exprimant un échange par convection. Il vient:

$$\Phi_{surface-fluide} = -k_{fluide} S \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = hS\left(T_p - T_\infty\right) \tag{3.17}$$

En considérant la température à la paroi T_p comme température de référence, nous pouvons écrire:

$$\partial T = \partial\left(T - T_p\right)$$

En introduisant une longueur L intervenant comme une caractéristique géométrique du corps considéré émettant la chaleur, on aura:

$$-k_{fluide} LS \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = hLS\left(T_p - T_\infty\right) \Rightarrow \frac{hL}{k_{fluide}} = \frac{-\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}}{\frac{T_p - T_\infty}{L}} = \frac{\partial \left(\frac{T_p - T}{T_p - T_\infty} \right)}{\partial \left(\frac{y}{L} \right)}$$

Le rapport $\frac{hL}{k_f}$ est appelé le nombre de Nüsselt. Pratiquement, ce nombre permet la détermination du coefficient de transfert par convection. En effet, si le nombre de Nüsselt est connu; h peut être calculé grâce à la simple relation:

$$h = Nu \frac{k_f}{L} \tag{3.18}$$

3.3.2 Détermination du Nüsselt

Sur la figure (3.4), on remarque que le gradient de la température est restreint à une région mince située près de la paroi dont l'épaisseur est δ_T. Afin de simplifier le processus, la courbe représentant le gradient de la température est remplacée par une droite (représentée en pointillé sur la figure). Cette droite qui est tangente à la courbe représente la distribution de la température dans une couche fictive d'épaisseur δ_T' qui si elle était stagnante présenterait la même résistance thermique au flux de chaleur. Dans cette

couche, le flux n'est transmis que par conduction. Par unité de surface, celui-ci est exprimé par la relation:

$$\frac{\Phi}{S} = k_{fluide} \frac{T_p - T_\infty}{\delta_T'} = h\left(T_p - T_\infty\right) \tag{3.19}$$

Donc: $h = \dfrac{k_{fluide}}{\delta_T'}$ (3.20)

Le nombre de Nüsselt s'écrira donc:

$$Nu = h\frac{L}{k_f} = \frac{L}{\delta_T'} \tag{3.21}$$

3.4 Méthodes d'évaluation de h

Il existe principalement quatre méthodes qui permettent l'évaluation du coefficient de transfert de chaleur par convection h. Toutes les quatre ont contribué à la compréhension du phénomène de transfert de chaleur par convection.

1- une analyse dimensionnelle combinée à l'expérimentation,
2- une solution exacte des équations du mouvement,
3- une solution approchée de la couche limite,
4- une utilisation de l'analogie entre les transferts de chaleur, de masse et de moment.

L'analyse dimensionnelle est mathématiquement simple et a trouvé depuis sa création un large champs d'application. Son inconvénient majeur est représenté par le fait que les résultats qu'elle permet d'obtenir sont incomplets et non utilisables sans l'apport de l'expérimentation.

L'analyse mathématique exacte requiert la solution simultanée des équations de conservation. La méthode présuppose une connaissance précise des mécanismes physiques suffisante pour les décrire mathématiquement. La complexité des équations rend en fait leur solution difficile. Elle est souvent obtenue grâce au concours des méthodes numériques.

Les solutions approchées de la couche limite utilisent une équation unique représentée par l'intégrale des équations du mouvement. Cette méthode est relativement simple et aboutit à des résultats satisfaisants compatibles avec ceux obtenus grâce aux méthodes exactes.

L'analogie entre les transferts de chaleur, de masse et de moment est un outil généralement utilisé pour une analyse en régime turbulent.

3.5 Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est différente des autres méthodes par le fait qu'elle n'introduit pas d'équations mathématiques à résoudre. Elle permet la combinaison d'un certain nombre de variables (ou groupes adimensionnels) qui débouchera sur des relations empiriques décrivant des résultats expérimentaux d'une manière acceptable et largement utilisable.

3.5.1 Détermination du nombre de groupes adimensionnels capables de décrire un phénomène: Théorème de Buckingham ou théoréme du π

Afin de déterminer combien de nombres adimensionnels sont nécessaires afin de décrire un phénomène physique, le théorème de Buckingham peut être utilisé. Il définit ce nombre (souvent noté π d'où le nom donné au théorème) comme étant la différence entre le nombre total de grandeurs physiques ou paramètres intervenant dans la description du phénomène (souvent noté n) et le nombre des différentes dimensions de base utilisées (souvent noté m). D'où:

$$\pi = n - m$$

Une valeur nulle ou négative de la différence $(n-m)$ signifie que l'ensemble des grandeurs physiques envisagé ne peut être ramené à une forme sans dimensions. Pour $n-m=1$, l'équation de similitude comporte uniquement un seul critère qui sera non déterminant car ne pouvant être qu'une constante. Si $n-m=2$, l'équation de similitude comportera deux nombres sans dimensions (qu'on notera π_1 et π_2) et pourra s'exprimer:

$$f(\pi_1, \pi_2) = 0 \quad \text{ou} \quad \pi_1 = F(\pi_2)$$

3.5.2 Exemple d'application du théorème de Buckingham

A titre d'exemple, essayons de déterminer la forme de l'équation de similitude permettant la détermination du coefficient de transfert de chaleur par convection forcée à l'intérieur d'une conduite de section circulaire. Une certaine expérience du phénomène considéré et de l'utilisation du théorème du π permet d'assumer que le coefficient de transmission h dépend principalement de six grandeurs physiques c'est-à-dire que:

$$\pi(D, k, U, \rho, \mu, C, h) = 0 \tag{3.22}$$

En retenant comme dimensions principales M, L, T et t représentant respectivement la masse, la longueur, la température et le temps, il vient:

- Diamètre du tube: $[D] = L$
- Conductivité thermique du fluide: $[k] = ML / t^3 T$
- Vitesse du flux: $[U] = L / t$
- Densité du fluide: $[\rho] = M / L^3$
- Viscosité du fluide: $[\mu] = M / Lt$
- Chaleur massique: $[C] = L^2 / t^2 T$
- Coefficient de transfert: $[h] = M / t^3 T$

L'application du théorème de Buckingham montre un besoin de trois nombres sans dimensions pour la description du problème:

$$7\ (D, k, U, \rho, \mu, C, h) - 4\ (M, L, T, t) = 3$$

Pour l'analyse des dimensions, L'équation (3.22) peut être écrite comme:

$$\pi = D^a . k^b . U^c . \rho^d . \mu^e . C^f . h^g \tag{3.23}$$

En identifiant les dimensions, on aura:

$$\pi = L^a\left(\frac{ML}{Tt^3}\right)^b\left(\frac{L}{t}\right)^c\left(\frac{M}{L^3}\right)^d\left(\frac{M}{Lt}\right)^e\left(\frac{L^2}{Tt^2}\right)^f\left(\frac{M}{Tt^3}\right)^g \qquad (3.24)$$

Pour que le produit π soit sans dimensions, il est nécessaire que la somme des exposants des différentes dimensions soit nulle. soit:

$$\begin{cases} \text{Pour L:} \quad b+d+e+g=0 \\ \text{Pour M:} \; a+b+c-3d-e+2f=0 \\ \text{Pour t :} \; -3b-c-e-2f-3g=0 \\ \text{Pour T :} \; -b-f-g=0 \end{cases} \qquad (3.25)$$

Ce système comporte 4 équations pour six inconnues. Il est donc possible de choisir 3 inconnues pour chaque nombre sans dimensions. La seule restriction dans ce choix est que les trois inconnues soient indépendantes.

1er choix

Comme le paramètre recherché est le coefficient de convection et afin qu'il apparaisse dans le nombre sans dimension, il est choisi $\underline{g=1}$. Dans un but de simplification des équations, il est pris $\underline{c=d=0}$. Dans ce cas, la résolution des équations (3.25) aboutira à $\underline{a=1}$, $\underline{b=-1}$ et $\underline{e=f=0}$ permettant de définir le premier nombre sans dimensions:

$$Nu = K.\mathrm{Re}^d.\mathrm{Pr}^f \qquad (3.26)$$

que nous reconnaissons comme étant le nombre de Nüsselt.

2ème choix

h ayant été défini, il ne devrait plus apparaître d'où le choix de $\underline{g=0}$. En choisissant $a=1$ et $f=0$, et en résolvant pour ces valeurs les équations (3.25), il vient $\underline{b=0}$, $\underline{c=d=1}$ et $\underline{e=-1}$ aboutissant à l'expression du second nombre sans dimensions:

$$\pi_2 = \frac{UD\rho}{\mu} \qquad (3.27)$$

que nous reconnaissons comme étant le nombre de Reynolds.

3ème choix

En prenant cette fois $\underline{a=c=d=g=0}$, $\underline{b=-1}$ et $\underline{e=f=1}$, c'est le nombre de Prandtl qui apparaît et qui s'exprime:

$$\pi_3 = \frac{C\mu}{k} \qquad (3.28)$$

Par conséquent, l'analyse dimensionnelle appliquée au cas de la transmission de la chaleur lors du mouvement forcé d'un fluide dans une conduite circulaire a permis de combiner les six grandeurs physiques dont dépend le coefficient de transfert convectif pour aboutir finalement à l'équation de similitude qui s'exprime:

$$Nu = K.\mathrm{Re}^{d}.\mathrm{Pr}^{f} \qquad (3.29)$$

La constante K et les puissances inconnues d et f sont déterminées grâce au concours de l'expérimentation.

3.6 Formules empiriques couramment utilisées

Un grand nombre de formules empiriques est disponible pour déterminer le coefficient de transmission par convection à travers l'expression du nombre de Nüsselt. Ces relations dépendent notamment du type de convection (forcée ou naturelle) et de la nature du régime d'écoulement du flux (laminaire ou turbulent). L'objet du présent paragraphe est d'essayer de résumer ces relations et de les exprimer pour le maximum de cas possible.

3.6.1 Convection forcée

3.6.1.1 Echange de chaleur le long d'une plaque plane

Régime laminaire: $\mathrm{Re} \leq 3.10^{5}$

$$Nu_L = 0{,}66\left(\mathrm{Re}_L\right)^{1/2}(\mathrm{Pr})^{1/3} \qquad (3.30)$$

Régime turbulent: $\mathrm{Re} \succ 3.10^{5}$

$$Nu_L = 0{,}036\left(\mathrm{Re}_L\right)^{4/5}(\mathrm{Pr})^{1/3} \qquad (3.31)$$

Exemple 3.6

Une plaque mince d'une longueur de 2m et d'une largeur de 1m est sous l'effet d'un écoulement d'air à la vitesse de 1,5m/s et de température 20°C dans la direction longitudinale. La température des surfaces de la plaque est de 90°C. Il est demandé de calculer (a) le coefficient de transmission de la chaleur par convection suivant la longueur ainsi que (b) le flux de chaleur transmis par la plaque à l'air.

Solution

a/ A $20^{\circ}C$, les caractéristiques de l'air sont:

$\rho = 1{,}175 kg/m^{3}$, $\mu = 1{,}8.10^{-5} kg/ms$, $k = 0{,}026 W/mK$, $C_p = 1006 J/kgK$

Déterminons la nature de l'écoulement:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho\, U\, L}{\mu} = \frac{1{,}175 \times 1{,}5 \times 2}{1{,}80.10^{-5}} = 1{,}96.10^{-5} \prec 3.10^{-5}$$

Il est donc laminaire et l'équation (3.30) peut être appliquée:

$$Nu_L = 0{,}66\, (\mathrm{Re}_L)^{1/2} (\mathrm{Pr})^{1/3} = \frac{h\,L}{k} \Rightarrow h = 0{,}66\, \frac{k}{L}\, (\mathrm{Re}_L)^{1/2} \left(\frac{\mu\, C_p}{\mathrm{k}}\right)^{1/3}$$

d'où: $$h = 0{,}66\, \frac{0{,}0260}{2}\, (1{,}96.10^{5})^{1/2} \left(\frac{1{,}80.10^{-5} \times 1006}{0{,}0260}\right)^{1/3} = \underline{3{,}36 W/m^2K}$$

b/ La chaleur transmise par la plaque (possédant deux parois, l'une supérieure et l'autre inférieure) à l'air est:

$$\Phi = 2.h.S.\Delta T = 2 \times 3{,}36 \times 2.1{,}5\ (90 - 20) = \underline{1411\ Watts}$$

3.6.1.2 Ecoulement à l'intérieur de tubes cylindriques lisses

<u>Régime laminaire:</u> $\mathrm{Re} \leq 2000$

- D: Diamètre intérieur du tube,
- μ_m, μ_p: Viscosités dynamiques définies à T_m et T_p.
- $T_m = \dfrac{T_p + T_f}{2}$: Température moyenne,
- T_p: Température de la paroi interne du tube,

- <u>Haussen:</u> $$Nu_D = 3{,}66 + \frac{0{,}0668.\mathrm{Re}.\mathrm{Pr}\ (D/L)}{1 + 0{,}04\,[\mathrm{Re}.\mathrm{Pr}.(D/L)]^{2/3}} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^{0{,}14} \qquad (3.32)$$

<u>Sieder et Tate:</u> $$Nu_D = 1{,}86\ (\mathrm{Re}.\mathrm{Pr})^{1/3} \left(\frac{D}{L}\right)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^{0{,}14} \qquad (3.33)$$

<u>pour</u>: $[\mathrm{Re}.\mathrm{Pr}.(D/L)] \succ 10$

Toutes les propriétés sont définies à T_m sauf μ_p

<u>Kays:</u> $$Nu_D = 3{,}66 + \frac{0{,}104.\mathrm{Re}.\mathrm{Pr}.(D/L)}{1 + 0{,}016\,[\mathrm{Re}.\mathrm{Pr}.(D/L)]^{0{,}8}} \qquad (3.34)$$

<u>pour</u>: $[\mathrm{Re}.\mathrm{Pr}.(D/L)] \prec 100$

Régime turbulent: $\mathrm{Re} \succ 2000$

Colburn: $$Nu_D = 0{,}023\ (\mathrm{Re})^{0.8}\ (\mathrm{Pr})^{1/3} \qquad (3.35)$$

pour:
- $L/D \succ 60$
- $0{,}7 \le \mathrm{Pr} \le 100$
- $10^4 \prec \mathrm{Re}_D \prec 1{,}2.10^5$

Sieder et Tate: $$Nu_D = 0{,}023\ (\mathrm{Re}_D)^{0.8}\ (\mathrm{Pr})^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^{0.14} \qquad (3.36)$$

Mc-Adams: $$Nu_D = 0{,}023.(\mathrm{Re_D})^{0.8}.(\mathrm{Pr})^{1/3}.\left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^{0.14}\left[1+(D/L)^{0.7}\right] \qquad (3.37)$$

pour: le régime d'entrée dans les tubes.

Exemple 3.7

Calculez le coefficient de transmission de la chaleur par convection ainsi que le flux dégagé lors de l'écoulement forcé d'une huile à la vitesse de 0,5 m/s dans un tube de 10mm de diamètre et de 1m de longueur si les températures moyennes de l'huile et de la paroi sont respectivement égales à 80°C et 20°C. Les caractéristiques de l'huile utilisée à la température à laquelle il s'écoule c'est-à-dire 80°C sont: $\rho = 844\,kg/m^3$; $\mu = 30{,}8.10^{-4}\,kg/ms$; $k = 0{,}108\,W/m°C$ et $C_p = 1{,}846\,kJ/kg°C$. *A la température de la paroi c'est-à-dire 20°C, la viscosité de l'huile est:* $\mu_p = 198{,}2.10^{-4}\,kg/ms$.

Solution

Déterminons d'abord le régime d'écoulement:

$$\mathrm{Re}_D = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{844\mathrm{x}0{,}5\mathrm{x}0{,}01}{30{,}8.10^{-4}} = 1370 \prec 2300$$

Le régime d'écoulement donc laminaire.

La relation de Haussen (3.32) peut donc être appliquée. Commençons par calculer le produit:

$$\mathrm{Re.Pr.}(D/L) = \mathrm{Re}\frac{\mu\, C_p}{\mathrm{k}}\frac{D}{L} = \frac{1370\mathrm{x}30{,}8.10^{-4}\mathrm{x}1846\mathrm{x}0{,}01}{0{,}108.1} = 721$$

$$h = \frac{k}{D}Nu_D = \frac{0{,}108}{0{,}01}\left[3{,}66 + \frac{0{,}0668.721}{1+0{,}04.(721)^{2/3}}\left(\frac{30{,}8}{198{,}2}\right)^{0{,}14}\right] = \underline{134{,}6\,W/m^2\,°C}$$

Calcul du flux de chaleur dégagé:

$$\Phi = h.S.\Delta T = h.\pi.D.L.\Delta T = 134{,}6 \times \pi \times 0{,}01 \times 1(80-20) = \underline{253{,}7\ Watts}$$

Remarque

Le produit $[\mathrm{Re}.\mathrm{Pr}.(D/L)]$ étant supérieur à 10, la relation de Sieder et Tate représentée par l'équation (3.33) peut être appliquée. Le résultat qu'on trouverait serait $h = 138{,}8W/m^2{}^\circ C$. L'erreur entre ce résultat et celui trouvé grâce à l'application de la relation de Haussen s'élève à 3%.

Exemple 3.8

On demande de calculer la quantité de chaleur transmise par une eau se déplaçant d'une manière forcée dans serpentin constitué d'un tube de 18mm de diamètre. Le débit de l'eau est de 0,24kg/s et sa température 120°C. La température de la paroi interne de la conduite dont la longueur est de 3m est considérée constante et égale à 110°C.

Solution

Les caractéristiques de l'eau à la température de 120°C sont trouvées égales à (cf. Annexes):

$$\rho = 945{,}3kg/m^3,\ \mu = 2{,}34.10^{-4}kg/ms,\ k = 0{,}685W/mK,\ C_p = 4250J/kgK$$

Calculons la vitesse de l'eau s'écoulant dans la conduite et le Reynolds:

$$U = \frac{\dot{m}}{\rho S} = \frac{0{,}24 \times 4}{945{,}3 \times .\pi(0{,}018)^2} = 1m/s$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho.U.D}{\mu} = \frac{945{,}3 \times 1 \times 0{,}018}{2{,}34.10^{-4}} = 7{,}3.10^4 \succ 2300$$

L'écoulement est donc turbulent. Appliquons la relation de Colburn (équation 3.5). Pour cela, il faudra vérifier les conditions:

- $\frac{L}{D} = \frac{3}{0{,}018} = 167 \succ 60 \quad \Rightarrow \quad Vérifié$
- $\mathrm{Pr} = \frac{\mu.C_p}{k} = \frac{2{,}34.10^{-4}.4250}{0{,}685} = 1{,}45 \prec 100 \text{ et } \succ 0{,}7 \quad \Rightarrow \quad Vérifié$
- $\mathrm{Re} = 7{,}3.10^4 \prec 1{,}2.10^5 \text{ et } \succ 10^4 \quad \Rightarrow \quad Vérifié$

Donc:

$$h = \frac{k}{D}Nu_D = \frac{0{,}685}{0{,}018}.0{,}023.(7{,}3.10^4)^{0,8}.(1{,}45)^{1,3} = 7702W/m^2K$$

$$\Phi = h.\pi.D.L.\Delta T = 7702.\pi.0{,}018.3.(120-110) = 13000W = 13kW$$

Remarque

La relation de Sieder et Tate (équation 3.36) permet aussi de calculer le nombre de Nüsselt et par conséquent le coefficient de transmission et le flux. Son application aboutit aux résultats suivants ($\mu_p = 2{,}57.10^{-4}\, kg/ms$):

$$Nu_D = 212{,}5 \ ; \ h = 8086{,}8 W/m^2 K \ ; \ \Phi = 13{,}7 kW$$

L'erreur entre les résultats fournis par les deux relations (Colburn et Sieder & Tate) est de 5% dans ce cas.

3.6.1.3 Ecoulement dans les espaces annulaires

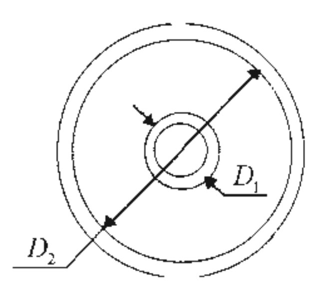


Figure 3.7: Ecoulement dans l'espace annulaire formé par les deux conduites

$$\underline{Nu_{DH} = 0{,}023\ (\mathrm{Re})^{0,8}\ (\mathrm{Pr})^n} \qquad (3.38)$$

avec:
- $\mathrm{Re}_{DH} = \dfrac{U_m . DH}{\nu}$ et $Nu_{DH} = \dfrac{h.DH}{k}$
- DH: Diamètre hydraulique. Dans ce cas: $DH = D_2 - D_1$
- $n = 0{,}4$ pour chauffage $(T_i \succ T_e)$
- $n = 0{,}3$ pour refroidissement $(T_i \prec T_e)$

3.6.1.4 Ecoulement perpendiculaire à un tube

Hilpert: $\underline{Nu_D = C.(\mathrm{Re}_D)^m}$ (3.39)

Re_D	C	m
1-4	0,891	0,330
4-40	0,821	0,385
40-4000	0,615	0,466
4000-40000	0,174	0,618
40000-250000	0,0239	0,805

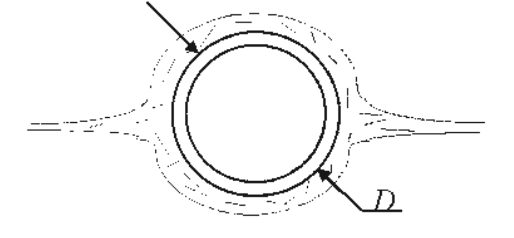


Figure 3.8: Ecoulement perpendiculaire à une conduite

3.6.1.5 Ecoulement perpendiculaire à une rangée de tubes

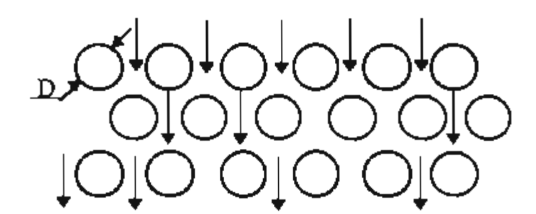
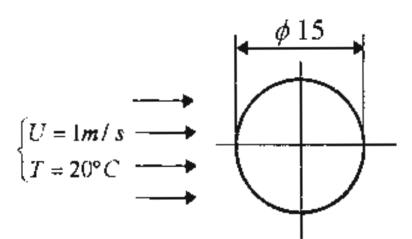


Figure 3.9: Ecoulement perpendiculaire à une rangée de conduites

Colburn: $$Nu_D = 0{,}33\,(\mathrm{Re}_D)^{0,6}\,(\mathrm{Pr})^{1/3} \qquad (3.40)$$

Exemple 3.9

Une barre de section circulaire de diamètre 15mm est refroidie par un courant d'air transversal de vitesse 1m/s et de température 20°C. Calculez la quantité de chaleur transmise à l'air par unité de longueur de la barre si la température de la paroi de cette dernière est de 80°C.



Solution

A $20°C$, les caractéristiques de l'air sont (cf. annexes):

$$\rho = 1{,}2 kg/m^3,\ \mu = 1{,}8.10^{-5} kg/ms,\ k = 0{,}0259 W/mK,\ C_p = 1006 J/kgK$$

L'écoulement étant perpendiculaire à la barre, la relation d'Hilpert représentée par l'équation (3.39) peut être appliquée. Calculons d'abord le nombre de Reynolds:

$$\mathrm{Re}_D = \frac{\rho.U.D}{\mu} = \frac{1{,}20 \times 1 \times 0{,}015}{1{,}8.10^{-5}} = 1000 \quad \Rightarrow \quad C = 0{,}615 \text{ et } m = 0{,}466$$

d'où: $$h = \frac{k}{D} Nu_D = \frac{k}{D} C\left(\mathrm{Re}_D\right)^m = \frac{0{,}0259}{0{,}015} 0{,}615(1000)^{0,466} = 26{,}55\ W/m^2K$$

Finalement:

$$\Phi = h.S.\Delta T = 26{,}55 \times \pi.0{,}015(80-20) = \underline{75\ W/m}$$

3.6.2 Convection naturelle ou libre sur parois isothermes

En paragraphe 3.5.2, il a été démontré qu'une corrélation de trois nombres adimensionnels (en l'occurrence: Re, Pr et Nü) est nécessaire afin de décrire un phénomène de transfert de chaleur par convection forcée. Dans le cas de la convection

naturelle ou libre, il peut être démontré qu'une corrélation entre nombres adimensionnels est aussi indispensable. Dans ce cas, les nombres adimensionnels sont ceux de Rayleigh, Grashoff et Prandtl. On notera que le nombre de Rayleigh a remplacé celui de Reynolds pour la détermination du régime d'écoulement (laminaire ou turbulent, cf. Tableau de la page suivante).

Le présent paragraphe propose les relations pouvant décrire un phénomène de transfert de chaleur par convection naturelle sur des parois isothermes c'est-à-dire dont les surfaces sont à une température constante $\left(T_p = Cste\right)$.

Pour un gaz quelconque: $$Nu_f = A.\left(Gr_f.\Pr_f\right)^m \quad (3.41)$$

Dans le cas de l'air: $$Nu_f = B.\left(Gr_f\right)^m \quad (3.42)$$

Remarques

1- Le nombre de Prandtl pour l'air est généralement considéré constant et sa valeur est prise égale à 0,7.

2- L'indice 'f' indique que la température du fluide est prise égale à celle du film situé près de la paroi c'est-à-dire que $T_f = \dfrac{T_p + T_\infty}{2}$.

Géométrie	Ra_f	A	m	B	Obs.
Plans et Cylindres verticaux Plans: L=Hauteur Cylindres: L=Longueur	Laminaire: $10^4 - 10^9$ Turbulent: $10^9 - 10^{13}$	0,59 0,13	0,25 0,33	0,54 0,12	Gr évalué sur L
Cylindres horizontaux de diamètre: D	Laminaire: $10^4 - 10^9$ Turbulent: $10^9 - 10^{13}$	0,53 0,13	0,25 0,33	0,49 0,12	Gr évalué sur D
Surfaces planes horizontales de longueur L dans le sens de l'écoulement	Laminaire: $10^5 - 2.10^7$ Turbulent: $2.10^7 - 3.10^{10}$	0,59 0,13	0,25 0,33	0,54 0,12	Gr évalué sur L

Exemple 3.10

Calculez les pertes de chaleur par unité de temps et par mètre carré de surface d'un échangeur horizontal dont le corps cylindrique est refroidi par un courant d'air libre de température 30°C. Le diamètre exteme de la conduite est de 400mm et la température de sa paroi 200°C.

Solution

On est dans le cas d'une convection libre avec comme fluide de l'air. La relation (3.42) peut donc être utilisée . Le choix des constantes B et m nécessite la connaissance du régime d'écoulement qui dans le cas d'un d'un échange par convection naturelle est décrit par le nombre de Rayleigh. Calculons d'abord la température du film de fluide:

$$T_f = \frac{T_{paroi} + T_{air}}{2} = \frac{200+30}{2} = 115°C = 388K$$

A cette température, les caractéristiques de l'air sont (cf. Annexes):

$$\rho = 0{,}885 kg/m^3,\ \mu = 2{,}2.10^{-5} kg/ms,\ k = 0{,}033W/mK,\ C_p = 1013J/kgK$$

Donc: $$Gr_f = \frac{\beta.g.\rho^2.D^3.(T_{paroi} - T_{film})}{\mu^2} = \frac{\frac{1}{388}.9{,}81.(0{,}885)^2.(0{,}4)^3.(200-115)}{(2{,}2.10^{-5})^2} = 2{,}22.10$$

$$\Pr_f = \frac{\mu.C_p}{k} = \frac{2{,}2.10^{-5}.1013}{0{,}033} = 0{,}675$$

d'où:

$$Ra_f = Gr_f.\Pr_f = 2{,}22.10^8.0{,}675 = 1{,}5.10^8 \prec 10^9$$

Le régime est donc laminaire. La conduite étant horizontale, les constantes de l'équation (3.42) sont donc égales à (cf. Tableau du paragraphe 3.6.2):

$B = 0{,}49$ et $m = 0{,}25$

Finalement:

$$h = \frac{k}{D}.Nu_f = \frac{k}{D}.B.(Gr_f)^m = \frac{0{,}033}{0{,}4}.0{,}49.(2{,}22.10^8)^{0.25} = 4{,}93\ W/m^2K$$

Et: $\Phi = h.\Delta T = 4{,}93.(200-30) = \underline{838\ W/m^2}$

Exemple 3.11

Une plaque horizontale de (2x3)m2 de surface est orientée vers le haut par sa paroi émettrice de chaleur. Calculez le coefficient de transmission de la chaleur à l'air ambiant calme sachant que la tempèrature de la plaque est 120°C et celle de l'air 34°C.

3.6 :

La température en tout point d'une mince plaque plane placée parallèlement à un courant d'air est égale à 365K. La vitesse du courant d'air principal est de 60m/s et sa température 270K. La plaque possède une largeur de 0,6m et une longueur de 0,45m dans la direction de l'écoulement. En négligeant les effets de bord de la plaque et en assumant que l'écoulement dans la couche limite change brusquement du laminaire au turbulent à un Reynolds de 4.10^5 *, trouvez:*

1- la distance à laquelle se fait la transition du laminaire au turbulent,

2- les coefficients de transfert convectif moyens (en tenant compte du nombre de Reynolds moyen) dans les régions laminaire et turbulente,

3- le flux de chaleur de la plaque entière considérant les deux faces.

Données: *On prendra les caractéristiques de l'air comme:*

$$\begin{cases} \rho = 1{,}2 kg/m^3 \ , \ Cp = 1010 J/kgK \ , \ \Pr = 0{,}71 \\ k = 0{,}024 W/mK \ , \ \mu = 1{,}74.10^{-5} kg/ms \end{cases}$$

Rép.: 1- $L_{transition} = 0{,}097m$

2- $h_{La\min aire.} = 65{,}15 W/m^2K$, $h_{Turbulent.} = 151{,}9 W/m^2K$

3- $\Phi = 6{,}8 kW$

3.7 :

Un radiateur est assimilé à une plaque verticale de (1mx1m). Que devrait être sa température pour dissiper 0,5kW dans un ambiant d'air de température 20°C s'écoulant par convection forcée à la vitesse de 1m/s ?

Rép.: $T = 149°C$

3.8 :

Les deux équations suivantes ont été proposées par Hansen en 1943. La première est applicable à des cas d'échange de chaleur par convection forcée dans un écoulement laminaire à l'intérieur de conduites cylindriques, tandis que la seconde s'applique pour des nombres de Reynolds se situant dans la région de transition c'est-à-dire $2000 \prec \mathrm{Re} \prec 8000$ *ainsi que pour des Reynolds plus importants.*

Comparez les valeurs du nombre de Nüsselt prédits par les deux équations pour:

- *Re=1000 Pr=1 pour (D/L)=0,08 et (D/L)=2*
- *Re=3000 Pr=1 pour (D/L)=0,1*
- *Re=20000 Pr=1 pour (D/L)=0,01*

avec celles obtenues par les relations empiriques appropriées.

$$(1) \qquad Nu = 3{,}65 + \frac{0{,}668(D/L)\mathrm{Re}\Pr}{1+0{,}04\left[(D/L)\mathrm{Re}\Pr\right]^{2/3}}\left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^{0{,}14}$$

$$(2) \qquad Nu = 0{,}106\left[(\mathrm{Re})^{2/3} - 125\right](\Pr)^{1/3}\left[1+(D/L)^{2/3}\right]\left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^{0{,}14}$$

On assumera que le fluide est de l'eau s'écoulant à la température de 288K à l'intérieur d'une conduite de température 336K. On assumera aussi que sa viscosité dynamique varie avec la température suivant le tableau suivant:

T (°C)	*μ (kg/ms)*
0	*$1,78 \cdot 10^{-3}$*
10	*$1,00.10^{-3}$*
20	*$1,00 \cdot 10^{-3}$*
40	*$0,651 \cdot 10^{-3}$*
60	*$0,469 \cdot 10^{-3}$*
80	*$0,354 \cdot 10^{-3}$*
100	*$0,281 \cdot 10^{-3}$*

<u>Rép.:</u>

- $\begin{cases} \mathrm{Re} = 1000 \\ D/L = 0{,}08 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Re.Pr.}(D/L) = 80 \prec 100 \Rightarrow \begin{cases} Nu_{Kayes} = 9{,}1 \\ Nu_{Sieder\,\&\,Tate} = 8{,}8 \\ Nu_{(1)} = 7 \end{cases}$
- $\begin{cases} \mathrm{Re} = 1000 \\ D/L = 2 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Re.Pr.}(D/L) = 2000 \succ 10 \Rightarrow \begin{cases} Nu_{Sieder\,\&\,Tate} = 25{,}78 \\ Nu_{(1)} = 23{,}5 \end{cases}$
- $\begin{cases} \mathrm{Re} = 3000 \\ D/L = 0{,}1 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Re} \prec 10000 \Rightarrow \begin{cases} Nu_{Sieder\,\&\,Tate} = 15{,}30 \\ Nu_{(2)} = 12{,}8 \end{cases}$
- $\begin{cases} \mathrm{Re} = 20000 \\ D/L = 0{,}01 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Re} \succ 10000 \text{ et } L/D \succ 60 \Rightarrow \begin{cases} Nu_{Colburn} = 63{,}4 \\ Nu_{(2)} = 81{,}7 \end{cases}$

<u>*3.9 :*</u>

Calculez par deux formules différentes la quantité de chaleur transmise par l'eau s'écoulant d'une manière forcée dans un serpentin constitué d'un tube de 18mm de diamètre. Le débit de l'eau est de 0,24kg/s et sa température 120°C. La température de la paroi interne de la conduite dont la longueur est de 3m est considérée constante et égale à 110°C. Comparez les résultats obtenus et expliquez la différence qui les sépare.

Les caractéristiques de l'eau sont:

A 100°C $\begin{cases} C_p = 4216 / kgK \,;\; k = 0{,}680W/mK \\ \rho = 960{,}6kg/m^3 \,;\; \mu = 0{,}281.10^{-3} kg/ms \end{cases}$

A 120°C: $\begin{cases} C_p = 4250 / kgK \,;\; k = 0{,}685W/mK \\ \rho = 945{,}3kg/m^3 \,;\; \mu = 0{,}234.10^{-3} kg/ms \end{cases}$

<u>Rép.:</u> $\Phi_{Colburn} = 12{,}9\,kW$; $\Phi_{Sieder\,\&\,Tate} = 13{,}7\,kW$

L'erreur de 6,2% trouvée est principalement due à l'empirisme des relations utilisées.

3.10 :

De l'air à une pression de 2 atmosphères et à une température de 200°C s'échauffe lorsqu'il passe dans une conduite de 1,58cm de diamètre à une vitesse de 15m/s.
1- Calculez la quantité de chaleur transmise par unité de longueur de la conduite si le flux thermique est maintenu constant à la paroi dont la température est de 20°C au-dessus de celle de l'air tout le long de la conduite,
2- Quelle serait l'augmentation de la température sur une longueur de 3m si on garde les mêmes conditions ?

Indications: 1- L'air est assimilé à un gaz parfait ($P = \rho.R.T$)
2- L'énergie peut s'exprimer par: $\Phi = \dot{m}.C_p.\Delta T$

Rép.: 1- $\Phi = 100 W/m$; 2- $\Delta T = 67°C$

3.11 :

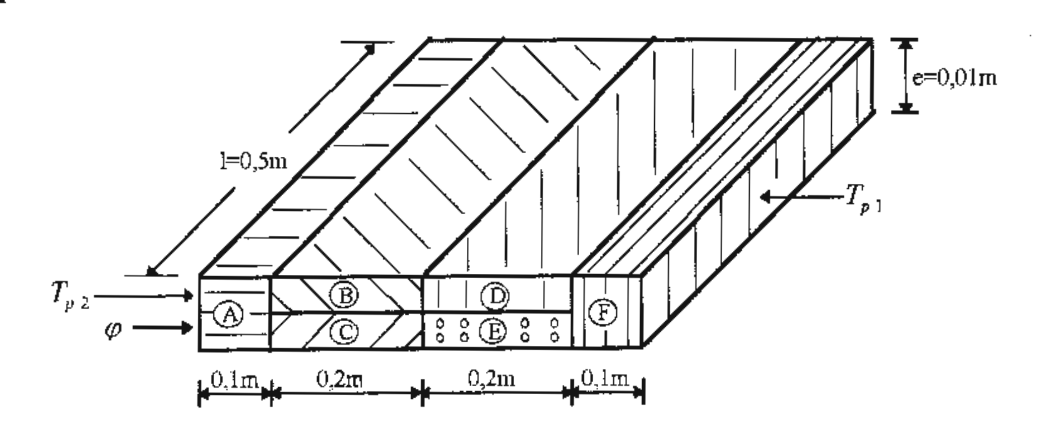
1- Un tube horizontal de 70mm de diamètre traverse une enceinte fermée de 5m de longueur remplie d'air à la température de 20°C. La température de la paroi de la conduite est de 100°C. Calculez le flux échangé par la conduite par convection.

2- En ouvrant les fenêtres de l'enceinte, un courant d'air d'une vitesse de 2m/s prend place. En assumant que les températures de l'air et de la conduite varient en conséquence pour devenir égales à 10°C et 90°C respectivement, calculez dans ce cas le flux échangé.

	10°C	20°C	50°C	60°C	90°C
$\rho_{air}\ (kg/m^3)$	1,24	1,20	1,09	1,03	0,99
$\mu_{air}\ (kg/m.s)$	$1,76.10^{-5}$	$1,81.10^{-5}$	$1,94.10^{-5}$	$2,02.10^{-5}$	$2,08.10^{-5}$
$Cp_{air}\ (J/kg.K)$	1006	1007	1008	1009	1010
$k_{air}\ (W/m.K)$	0,024	0,026	0,028	0,030	0,032

Rép.: 1- $\Phi = 703,31 W$; 2- $\Phi = 876 W$

3.12 :



1- Soit le mur représenté ci-dessus. En assumant une conduction unidimensionnelle et connaissant les valeurs des températures aux parois T_{p1} et T_{p2} ainsi que les

conductibilités thermiques de ses différentes sections, calculez le flux de chaleur transmis à travers le mur.

2- En assumant l'épaisseur du mur négligeable devant ses autres dimensions, celui-ci est assimilé à une plaque horizontale au-dessus de laquelle s'écoule librement de l'air à la température de 1000K dans le sens de la longueur. La température de la paroi de la plaque est de 1074K. On demande de déterminer le flux de chaleur échangé entre l'air et la plaque.

3- Trouvant que le flux échangé par convection libre est insuffisant, un ventilateur est placé au-dessus de la plaque permettant de faire acquérir à l'air une vitesse de 20m/s. Les températures de l'air environnant et de la plaque diminuent en conséquence et deviennent égales à 890K et 980K respectivement. On demande de calculer dans ce cas le nouveau flux de chaleur échangé entre l'air et la plaque.

Données:

$$\begin{cases} T_{p1} = 1850°C \quad ; \quad T_{p2} = 65°C \\ k_A = 180\ W/mK \quad ; \quad k_B = 45\ W/mK \quad ; \quad k_C = 90\ W/mK \\ k_D = 60\ W/mK \quad ; \quad k_E = 120\ W/mK \quad ; \quad k_F = 165\ W/mK \end{cases}$$

Rép.: 1- $1400W$ 2- $59W$ 3- $5760W$

3.13 :

1- La température d'une plaque verticale parallèlement à laquelle s'écoule un gaz dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau est de 385K, la température du gaz étant 315K. La plaque possède une largeur de 0,1m et une hauteur de 0,2m dans la direction de l'écoulement. Il est demandé de déterminer:

1a- la nature de l'écoulement,

1b- le coefficient de transmission par convection,

1c- le flux de chaleur dégagé par la plaque.

2- On place un ventilateur au-dessus de la plaque de telle façon que le gaz environnant acquiert une vitesse de 60m/s. En assumant que les températures de la plaque et du fluide diminuent en conséquence et deviennent égales respectivement à 340K et 260K, déterminez:

2a- la nature de l'écoulement,

2b- le coefficient de transmission par convection,

2c- le flux de chaleur dégagé par la plaque.

3- Quelle conclusion pouvez-vous tirer des résultats obtenus ?

Données: *caractéristiques du gaz:*

$T\ (K)$	$\rho\ (kg/m^3)$	$\mu\ (kg/m.s)$	$C_p\ (J/kg.K)$	$k\ (W/m.K)$
250	2,166	$12,6\ 10^{-6}$	803,9	0,0129
300	1,797	$15,0\ 10^{-6}$	870,9	0,0166
350	1,536	$17,2\ 10^{-6}$	900,2	0,0205
400	1,342	$19,3\ 10^{-6}$	942,0	0,0246

Rép.: 1a- laminaire ; 1b- $h = 5\ W/m^2K$; 1c- $\Phi = 7$ W
2a- Turbulent ; 2b- $h = 233\ W/m^2K$; 2c- $\Phi = 372{,}8$ W
3- La convection forcée augmente d'une manière sensible le flux de chaleur dégagé par la plaque

3.14 :

On sait que les échanges par convection libre sont décrits par une relation du type Nü=f(Gr,Pr). Prenons le cas de l'air pour lequel:

$\rho = 1{,}25.10^{-3} CGS$ *à 0°C* ; $\mu = 1{,}74.10^{-4} CGS$ *à 0°C*

k=0,58 calories CGS à 0°C ; Pr=0,71

$Gr = \dfrac{\beta .g; \Delta T.\rho^2.L^3}{\mu^2}$ *; L: Dimension linéaire de l'objet considéré.*

et:

$\log_{10}(Nu)$	0,16	0,28	0,42	0,59	0,78	1,02
$\log_{10}(Gr.\mathrm{Pr})$	0	1	2	3	4	5
	1,27	1,52	1,77	2,02	2,33	2,70
	6	7	8	9	10	11

1- En prenant L=3m, donnez pour ΔT=5°C, 10°C et 15°C la valeur du Nüsselt. Calculez le coefficient de transmission h en $W/cm^2{}^\circ C$ et tracez la courbe $h = f(\Delta T)$.

2- Un mur est constitué d'une paroi en verre de 5mm d'épaisseur et de conductivité thermique $k = 10^{-2}\ W/cm^\circ C$. Calculez sa résistance thermique en W/CGS.

3 - Calculez, pour un flux de chaleur de 20W/m^2, 40W/m^2 et 60W/m^2 la différence de température entre les deux faces de la plaque de verre et en assumant que la valeur de h est la même des deux côtés tracer la courbe représentant la variation du flux en fonction de la différence de température.

4- Remplacez le simple vitrage par deux vitres identiques séparées par un vide d'air de 1cm d'épaisseur. Tracez la courbe représentant la variation du flux de chaleur par unité de surface en fonction de la différence de température.

Rép.: 1- $Gr = 5.10^7.\Delta T$; 2- $R = 50^\circ C/W$
3- $\Delta T = 0{,}1/0{,}2/0{,}3$; 4- $\Delta T = 4266{,}7\,\Phi$

3.15 :

Une conduite horizontale de 30cm de diamétre, de 3m de longueur et de 250°C de température se trouve dans une pièce où régne une température de 15°C. Calculez la puissance échangée par convection libre entre la conduite et l'air de la pièce.

Rép.: $\Phi = 4{,}45 kW$

3.16 :

Le mur d'une maison a 6m de hauteur et 10m de longueur. Sous l'échauffement du soleil, sa température atteint 40°C. La température ambiante est de 20°C. Calculez le flux échangé par convection naturelle par le mur.

Rép.: $\Phi = 4{,}7\,kW$

3.17 :

Calculez le coefficient de transmission de la chaleur d'une plaque verticale de hauteur 2m dont la température de la surface est de 100°C si elle était laissée à l'air libre ayant pour température 20°C.

Rép.: $h = 4{,}76 W / m^2 K$